SUMMER OF MACHINE LEARNING AT SKOLTECH

# Коммуникации в распределенной и федеративной оптимизации

Александр Безносиков
ФПМИ МФТИ, Сколтех, Иннополис, MBZUAI

Skoltech Applied AI Center

# Введение

# Современные проблемы обучения

- Экспоненциальный рост размеров моделей и объемов данных.

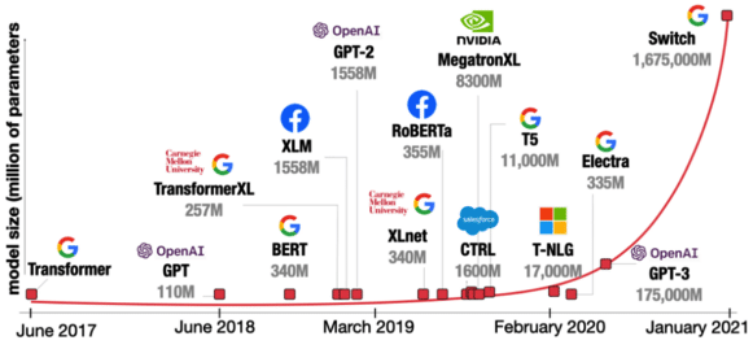



Рисунок: Динамика роста современных языковых моделей

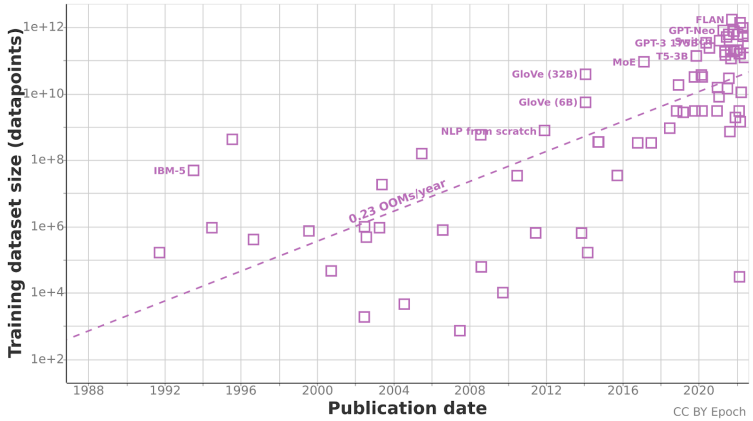



Рисунок: Динамика роста датасетов

# Разновидности распределенного обучения

- Кластерное обучение (крупные игроки): обучаем в пределах одного большого и мощного вычислительного кластера
- Коллаборативное обучение (все игроки): объединяем вычислительные ресурсы по сети Интернет

# Разновидности распределенного обучения

- Кластерное обучение (крупные игроки): обучаем в пределах одного большого и мощного вычислительного кластера
- Коллаборативное обучение (все игроки): объединяем вычислительные ресурсы по сети Интернет
- Федеративное обучение (другая парадигма): обучаемся на локальных данных пользователей, используя их вычислительные мощности

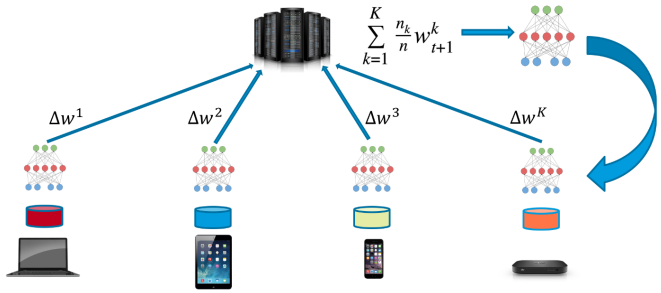



Рисунок: Федеративное обучение

# Самая популярная распределенная постановка

- Постановка (горизонтальная, оффлайн):

$$\min_{w \in \mathbb{R}^d} f(w) := \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} f_m(w) := \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{n_m} \sum_{i=1}^{n_m} l(g(w, x_i), y_i).$$

- $w$ – веса модели, $g$ – модель, $l$ – функция потерь.
- Данные разделены между $M$ вычислительными устройствами, на каждом устройстве $m$ своя локальная подвыборка $\{x_i, y_i\}_{i=1}^{n_m}$ размера $n_m$.
- В фокусе этого доклада.

# Общаемся через сервер

- Посмотрим на примере, как обычный неопределенный GD становится централизованным.

---

**Algorithm** Централизованный GD

---

**Вход:** Размер шага $\gamma > 0$, стартовая точка $w_0 \in \mathbb{R}^d$, количество итераций $K$

**for** $k = 0, 1, \ldots, K-1$ **do**
  Отправить $w_k$ всем рабочим ▷ выполняется сервером
  **for** $i = 1, \ldots, n$ параллельно **do**
    Принять $w_k$ от мастера ▷ выполняется рабочими
    Вычислить градиент $\nabla f_m(w_k)$ в точке $w_k$ ▷ выполняется рабочими
    Отправить $\nabla f_m(w_k)$ мастеру ▷ выполняется рабочими
  **end for**
  Принять $\nabla f_m(w_k)$ от всех рабочих ▷ выполняется сервером
  Вычислить $\nabla f(w_k) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \nabla f_m(w_k)$ ▷ выполняется сервером
  $w_{k+1} = w_k - \gamma \nabla f(w_k)$ ▷ выполняется сервером
**end for**

**Выход:** $w^K$

---

# С чем и за что боремся?

- **Вопрос:** распределенность нужна для параллелизации, но почему не получается достигнуть полного распараллеливания?

# С чем и за что боремся?

- **Вопрос:** распределенность нужна для параллелизации, но почему не получается достигнуть полного распараллеливания?
- Коммуникационные затраты являются бесполезной тратой времени.
- Проблема коммуникационного узкого места актуальна для всех постановок распределенного обучения.
- Существует много способов борьбы за эффективные коммуникации.

# Сжатие: несмещенные и смещенные операторы

# Несмещённая компрессия (квантизация)

## Несмещённая компрессия (квантизация)

Будем называть стохастический оператор $\mathcal{Q}(x)$ оператором несмещённой компрессии (квантизации), если для любого $x \in \mathbb{R}^d$ выполняется:

$$\mathbb{E}[\mathcal{Q}(x)] = x, \quad \mathbb{E}[\|\mathcal{Q}(x)\|_2^2] \leq \omega \|x\|_2^2,$$

где $\omega \geq 1$.

# Несмещённая компрессия: примеры

## Случайная спарсификация (выбор случайных компонент)

Рассмотрим стохастический оператор

$$\text{Randk}(x) = \frac{d}{k} \sum_{i \in S} [x]_i e_i,$$

где $k$ — некоторое фиксированное число из множества $\{1, \ldots, d\}$ (количество компонент вектора $x$, которые мы передаём; например, можно выбрать $k = 1$), $S$ — случайное подмножество множества $\{1, \ldots, d\}$ размера $k$ (подмножество $S$ выбирается случайно и равновероятно среди всех возможных подмножеств размера $d$), $[\cdot]_i$ – $i$-я компонента вектора, $(e_1, \ldots, e_d)$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^d$.

Richtárik P. and Takáč M. Parallel coordinate descent methods for big data optimization

# Несмещённая компрессия: примеры

## Случайная спарсификация (выбор случайных компонент)

Рассмотрим стохастический оператор

$$\text{Randk}(x) = \frac{d}{k} \sum_{i \in S} [x]_i e_i,$$

где $k$ — некоторое фиксированное число из множества $\{1, \ldots, d\}$ (количество компонент вектора $x$, которые мы передаём; например, можно выбрать $k = 1$), $S$ — случайное подмножество множества $\{1, \ldots, d\}$ размера $k$ (подмножество $S$ выбирается случайно и равновероятно среди всех возможных подмножеств размера $d$), $[\cdot]_i$ – $i$-я компонента вектора, $(e_1, \ldots, e_d)$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^d$.

Richtárik P. and Takáč M. Parallel coordinate descent methods for big data optimization

- **Вопрос:** зачем нужен множитель $\frac{d}{k}$?

# Несмещённая компрессия: примеры

## Случайная спарсификация (выбор случайных компонент)

Рассмотрим стохастический оператор

$$\text{Randk}(x) = \frac{d}{k} \sum_{i \in S} [x]_i e_i,$$

где $k$ — некоторое фиксированное число из множества $\{1, \ldots, d\}$ (количество компонент вектора $x$, которые мы передаём; например, можно выбрать $k = 1$), $S$ — случайное подмножество множества $\{1, \ldots, d\}$ размера $k$ (подмножество $S$ выбирается случайно и равновероятно среди всех возможных подмножеств размера $d$), $[\cdot]_i$ – $i$-я компонента вектора, $(e_1, \ldots, e_d)$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^d$.

Richtárik P. and Takáč M. Parallel coordinate descent methods for big data optimization

- **Вопрос:** зачем нужен множитель $\frac{d}{k}$? Для несмещенности.

# Несмещённая компрессия: примеры

- **Вопрос:** Чему равно $\omega$ для случайной спарсификации?

# Несмещённая компрессия: примеры

- **Вопрос:** Чему равно $\omega$ для случайной спарсификации? $\frac{d}{k}$.
  Каждая координата попадет в $\mathcal{Q}(x)$ с вероятностью $\frac{k}{d}$, поэтому

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\|\mathcal{Q}(x)\|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{d}[\mathcal{Q}(x)]_i^2\right] \\ &= \frac{d^2}{k^2}\left[\sum_{i=1}^{d}\frac{k}{d}[x]_i^2\right] \\ &= \frac{d}{k}\|x\|^2.\end{aligned}$$

  Здесь $[\cdot]_i$ – $i$ая координата вектора.

# Несмещённая компрессия: примеры

## Трёхуровневая $\ell_2$-квантизация

Рассмотрим следующий оператор:
$[\mathcal{Q}(x)]_i = \|x\|_2 \text{sign}(x_i)\xi_i,\ i = 1, \ldots, d$, где $[\cdot]_i$ – $i$-я компонента вектора, и $\xi_i$ — случайная величина, имеющая распределение Бернулли с параметром $\frac{|x_i|}{\|x\|_2}$, т. е.

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } \frac{|x_i|}{\|x\|_2}, \\ 0 & \text{с вероятностью } 1 - \frac{|x_i|}{\|x\|_2}. \end{cases}$$

Таким образом, если мы хотим передать вектор $\mathcal{Q}(x)$, то нам нужно передать вектор, состоящий из нулей и $\pm 1$, и вещественное число $\|x\|_2$, причём вероятность обнуления компоненты тем больше, чем компонента меньше по модулю. Можно показать, что данный оператор является несмещённой компрессией с константой $\omega = \sqrt{d}$.

Alistarh D. et al. QSGD: Communication-Efficient SGD via Gradient Quantization and Encoding

# Несмещённая компрессия: примеры

- **Вопрос:** Будет ли округление несмещенным оператором?
- **Вопрос:** Какое округление кажется наиболее естественным для вычислений на компьютере?

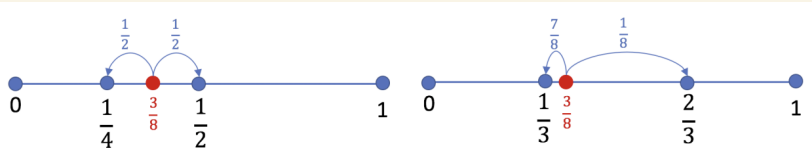
# Несмещённая компрессия: примеры

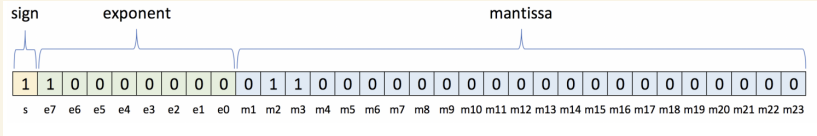
## Натуральная компрессия (случайное округление к степени двойки)

Рассмотрим следующий оператор:

$$[\mathcal{Q}(x)]_i = \begin{cases} \lfloor [x]_i \rfloor_2, & \text{с вероятностью } p = \dfrac{[x]_i - \lceil [x]_i \rceil_2}{\lceil [x]_i \rceil_2 - \lfloor [x]_i \rfloor_2} \\ \lceil [x]_i \rceil_2, & \text{с вероятностью } 1 - p \end{cases},$$

где $[\cdot]_i$ – $i$-я компонента вектора, $\lfloor \cdot \rfloor_2$ – ближайшая степень двойки снизу, $\lceil \cdot \rceil_2$ – ближайшая степень двойки сверху. Округляем в двум ближайшим степеням двойки, вероятность округления больше, чем реальное число ближе к соотвествующей степени двойки. Можно показать, что $\omega = \frac{9}{8}$.




Horváth S. et al. Natural compression for distributed deep learning

# Несмещенная компрессия: идея

- Самая простая идея, которая приходит в голову, состоит в том, чтобы использовать параллельный GD, но к градиентам, пересылаемым от рабочих на сервер, применять несмещённую компрессию.

# Квантизированный GD (QGD)

**Algorithm** QGD

**Вход:** размер шага $\gamma > 0$, стартовая точка $w_0 \in \mathbb{R}^d$, количество итераций $K$

**for** $k = 0, 1, \ldots, K-1$ **do**
  Отправить $w_k$ всем рабочим ▷ выполняется сервером
  **for** $m = 1, \ldots, M$ параллельно **do**
    Принять $w_k$ от мастера ▷ выполняется рабочими
    Вычислить градиент $\nabla f_m(w_k)$ в точке $w_k$ ▷ выполняется рабочими
    Независимо сгенерировать $g_{k,m} = \mathcal{Q}(\nabla f_m(w_k))$ ▷ выполняется рабочими
    Отправить $g_{k,m}$ мастеру ▷ выполняется рабочими
  **end for**
  Принять $g_{k,m}$ от всех рабочих ▷ выполняется сервером
  Вычислить $g_k = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} g_{k,m}$ ▷ выполняется сервером
  $w_{k+1} = w_k - \gamma g_k$ ▷ выполняется сервером
**end for**

**Выход:** $w^K$

# Несмещенная компрессия: доказательство

- Будем доказывать в случае, когда все $f_m$ являются $L$-гладкими и $\mu$-сильно выпуклыми.
- Рассмотрим одну итерацию метода:

$$\|w_{k+1} - w^*\|^2 = \|w_k - w^*\|^2 - 2\gamma\langle g_k, w_k - w^*\rangle + \|g_k\|^2.$$

# Несмещенная компрессия: доказательство

- Будем доказывать в случае, когда все $f_m$ являются $L$-гладкими и $\mu$-сильно выпуклыми.
- Рассмотрим одну итерацию метода:

$$\|w_{k+1} - w^*\|^2 = \|w_k - w^*\|^2 - 2\gamma\langle g_k, w_k - w^*\rangle + \|g_k\|^2.$$

- Берем условное мат.ожидание по случайности только на итерации $k$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\|w_{k+1} - w^*\|^2 \mid w_k\right] =& \|w_k - w^*\|^2 - 2\gamma\langle \mathbb{E}\left[g_k \mid w_k\right], w_k - w^*\rangle \\ &+ \gamma^2\mathbb{E}\left[\|g_k\|^2 \mid w_k\right].\end{aligned}$$

# Несмещенная компрессия: доказательство

- Работаем с $\mathbb{E}\left[g_k \mid w_k\right]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[g_k \mid w_k\right] &= \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\mathbb{E}\left[g_{k,m} \mid w_k\right] \\ &= \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathcal{Q}(\nabla f_m(w_k)) \mid \nabla f_m(w_k)\right] \mid w_k\right] \\ &= \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\mathbb{E}\left[\nabla f_m(w_k) \mid w_k\right] = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\nabla f_m(w_k) = \nabla f(w_k).\end{aligned}$$

# Несмещенная компрессия: доказательство

- Работаем с $\mathbb{E}\left[g_k \mid w_k\right]$:

$$\mathbb{E}\left[g_k \mid w_k\right] = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\mathbb{E}\left[g_{k,m} \mid w_k\right]$$
$$= \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathcal{Q}(\nabla f_m(w_k)) \mid \nabla f_m(w_k)\right] \mid w_k\right]$$
$$= \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\mathbb{E}\left[\nabla f_m(w_k) \mid w_k\right] = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\nabla f_m(w_k) = \nabla f(w_k).$$

- Работаем с $\mathbb{E}\left[\|g_k\|^2 \mid w_k\right]$:

$$\mathbb{E}\left[\|g_k\|^2 \mid w_k\right] = \mathbb{E}\left[\left\|\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}g_{k,m}\right\|^2 \mid x_k\right] = \frac{1}{M^2}\mathbb{E}\left[\left\|\sum_{m=1}^{M}g_{k,m}\right\|^2 \mid w^k\right]$$

# Несмещенная компрессия: доказательство

- Продолжаем и применяем первое свойство (несмещенность) в определении компрессии:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\|g_k\|^2 \mid w_k\right] &= \frac{1}{M^2}\mathbb{E}\left[\left\|\sum_{m=1}^{M} g_{k,m}\right\|^2 \mid w_k\right] \\
&= \frac{1}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\mathbb{E}\left[\|g_{k,m}\|^2 \mid w_k\right] \\
&\quad + \frac{2}{M^2}\sum_{m\neq l}\mathbb{E}\left[\langle g_{k,m}, g_{k,l}\rangle \mid w_k\right] \\
&= \frac{1}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\mathbb{E}\left[\|g_{k,m}\|^2 \mid w_k\right] \\
&\quad + \frac{1}{M^2}\sum_{m\neq l}\mathbb{E}\left[\langle \mathbb{E}\left[g_{k,m} \mid \nabla f_m(w_k)\right], \mathbb{E}\left[g_{k,l} \mid \nabla f_l(x_k)\right]\rangle \mid w_k\right].
\end{aligned}
$$

# Несмещенная компрессия: доказательство

- Продолжаем и применяем первое свойство (несмещенность) в определении компрессии:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\|g_k\|^2 \mid w_k\right] &= \frac{1}{M^2}\mathbb{E}\left[\left\|\sum_{m=1}^{M} g_{k,m}\right\|^2 \mid w_k\right] \\
&= \frac{1}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\mathbb{E}\left[\|g_{k,m}\|^2 \mid w_k\right] \\
&\quad + \frac{2}{M^2}\sum_{m\neq l}\mathbb{E}\left[\langle g_{k,m}, g_{k,l}\rangle \mid w_k\right] \\
&= \frac{1}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\mathbb{E}\left[\|g_{k,m}\|^2 \mid w_k\right] \\
&\quad + \frac{1}{M^2}\sum_{m\neq l}\mathbb{E}\left[\langle \mathbb{E}\left[g_{k,m} \mid \nabla f_m(w_k)\right], \mathbb{E}\left[g_{k,l} \mid \nabla f_l(x_k)\right]\rangle \mid w_k\right].
\end{aligned}$$

# Несмещенная компрессия: доказательство

- Продолжаем и применяем второе свойство в определении компрессии:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\|g_k\|^2 \mid w_k\right] =& \frac{1}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\mathbb{E}\left[\|\mathcal{Q}(\nabla f_m(w_k))\|^2 \mid w_k\right] \\
&+ \frac{1}{M^2}\sum_{m\neq l}\langle \nabla f_m(w_k), \nabla f_l(w_k)\rangle \\
\leq& \frac{\omega}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\|\nabla f_m(w_k)\|^2 \\
&+ \|\nabla f(w_k)\|^2 \\
\leq& \frac{2\omega}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\|\nabla f_m(w_k) - \nabla f_m(w^*)\|^2 \\
&+ \frac{2\omega}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\|\nabla f_m(w^*)\|^2 + \|\nabla f(w_k) - \nabla f(w^*)\|^2.
\end{aligned}
$$

# Несмещенная компрессия: доказательство

- Продолжаем и применяем второе свойство в определении компрессии:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\|g_k\|^2 \mid w_k\right] \leq & \frac{4\omega L}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\left(f_m(w_k) - f_m(w^*) - \langle \nabla f_m(w^*), w_k - w^*\rangle\right) \\ & + \frac{2\omega}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\|\nabla f_m(x^*)\|^2 + 2L(f(x_k) - f(x^*)) \\ = & \frac{4\omega L}{M}(f(x_k) - f(x^*)) \\ & + \frac{2\omega}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\|\nabla f_m(x^*)\|^2 + 2L(f(x_k) - f(x^*)).\end{aligned}$$

# Несмещенная компрессия: доказательство

- Все, что получили:

$$\mathbb{E}\left[\|w_{k+1} - w^*\|^2 \mid w_k\right] = \|w_k - w^*\|^2 - 2\gamma\langle \mathbb{E}\left[g_k \mid w_k\right], w_k - w^*\rangle + \gamma^2 \mathbb{E}\left[\|g_k\|^2 \mid w_k\right].$$

$$\mathbb{E}\left[g_k \mid w_k\right] = \nabla f(w_k).$$

$$\mathbb{E}\left[\|g_k\|^2 \mid w_k\right] \leq \frac{4\omega L}{M}(f(w_k) - f(w^*)) + \frac{2\omega}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\|\nabla f_m(w^*)\|^2 + 2L(f(w_k) - f(w^*)).$$

# Несмещенная компрессия: доказательство

- Объединяем:

$$\mathbb{E}\left[\|w_{k+1} - w^*\|^2 \mid w_k\right] \leq \|w_k - w^*\|^2 - 2\gamma\langle \nabla f(w_k), w_k - w^*\rangle + 2\gamma^2 L\left(\frac{2\omega}{M} + 1\right)(f(w_k) - f(w^*)) + \frac{2\gamma^2\omega}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\|\nabla f_m(w^*)\|^2.$$

- Пользуемся сильной выпуклостью:

$$\mathbb{E}\left[\|w_{k+1} - w^*\|^2 \mid w_k\right] \leq \|w_k - w^*\|^2 - 2\gamma\left(\frac{\mu}{2}\|w_k - w^*\|^2 + f(w_k) - f(w^*)\right) + 2\gamma^2 L\left(\frac{2\omega}{M} + 1\right)(f(w_k) - f(w^*)) + \frac{2\gamma^2\omega}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\|\nabla f_m(w^*)\|^2.$$

# Несмещенная компрессия: доказательство

- Если взять полное математическое ожидание

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\|x_{k+1}-x^*\|^2\right] \leq & (1-\gamma\mu)\mathbb{E}\left[\|x_k-x^*\|^2\right] \\ & -2\gamma\left[1-\gamma L\left(\frac{2\omega}{M}+1\right)\right]\mathbb{E}\left[(f(x_k)-f(x^*))\right] \\ & +\frac{2\gamma^2\omega}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\|\nabla f_m(x^*)\|^2.\end{aligned}$$

- Если $\gamma \leq L^{-1}\left(\frac{2\omega}{M}+1\right)^{-1}$, то

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\|x_{k+1}-x^*\|^2\right] \leq & (1-\gamma\mu)\mathbb{E}\left[\|x_k-x^*\|^2\right] \\ & +\frac{2\gamma^2\omega}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\|\nabla f_m(x^*)\|^2.\end{aligned}$$

# QGD: сходимость

## Теорема (QGD)

Пусть все локальные функции $f_m$ являются $\mu$-сильно выпуклыми и имеют $L$-Липшицев градиент, тогда если $\eta \leq L^{-1}\left(\frac{2\omega}{M}+1\right)^{-1}$, то

$$\mathbb{E}\left[\|x_K - x^*\|^2\right] = \mathcal{O}\left((1-\gamma\mu)^K\|x_0 - x^*\|^2 + \frac{1}{K}\cdot\frac{2\omega}{\mu M^2}\sum_{m=1}^{M}\|\nabla f_m(x^*)\|^2\right).$$

При получении данного результата так же использовался подбор $\gamma$ из работы:

Stich S. Unified Optimal Analysis of the (Stochastic) Gradient Method

# QGD: сходимость

## Теорема (QGD)

Пусть все локальные функции $f_m$ являются $\mu$-сильно выпуклыми и имеют $L$-Липшицев градиент, тогда если $\eta \leq L^{-1}\left(\frac{2\omega}{M}+1\right)^{-1}$, то

$$\mathbb{E}\left[\|x_K - x^*\|^2\right] = \mathcal{O}\left((1-\gamma\mu)^K\|x_0 - x^*\|^2 + \frac{1}{K}\cdot\frac{2\omega}{\mu M^2}\sum_{m=1}^{M}\|\nabla f_m(x^*)\|^2\right).$$

При получении данного результата так же использовался подбор $\gamma$ из работы:

Stich S. Unified Optimal Analysis of the (Stochastic) Gradient Method

- **Вопрос:** какие проблемы есть в этой оценке? (вспомните оценку сходимости GD)

# QGD: сходимость

## Теорема (QGD)

Пусть все локальные функции $f_m$ являются $\mu$-сильно выпуклыми и имеют $L$-Липшицев градиент, тогда если $\eta \leq L^{-1}\left(\frac{2\omega}{M}+1\right)^{-1}$, то

$$\mathbb{E}\left[\|x_K - x^*\|^2\right] = \mathcal{O}\left((1-\gamma\mu)^K\|x_0 - x^*\|^2 + \frac{1}{K}\cdot\frac{2\omega}{\mu M^2}\sum_{m=1}^{M}\|\nabla f_m(x^*)\|^2\right).$$

При получении данного результата так же использовался подбор $\gamma$ из работы:

Stich S. Unified Optimal Analysis of the (Stochastic) Gradient Method

- **Вопрос:** какие проблемы есть в этой оценке? (вспомните оценку сходимости GD) Сублинейная сходимость (зависит от гетерогенности данных).

# QGD: сходимость

- Поведение на практике:

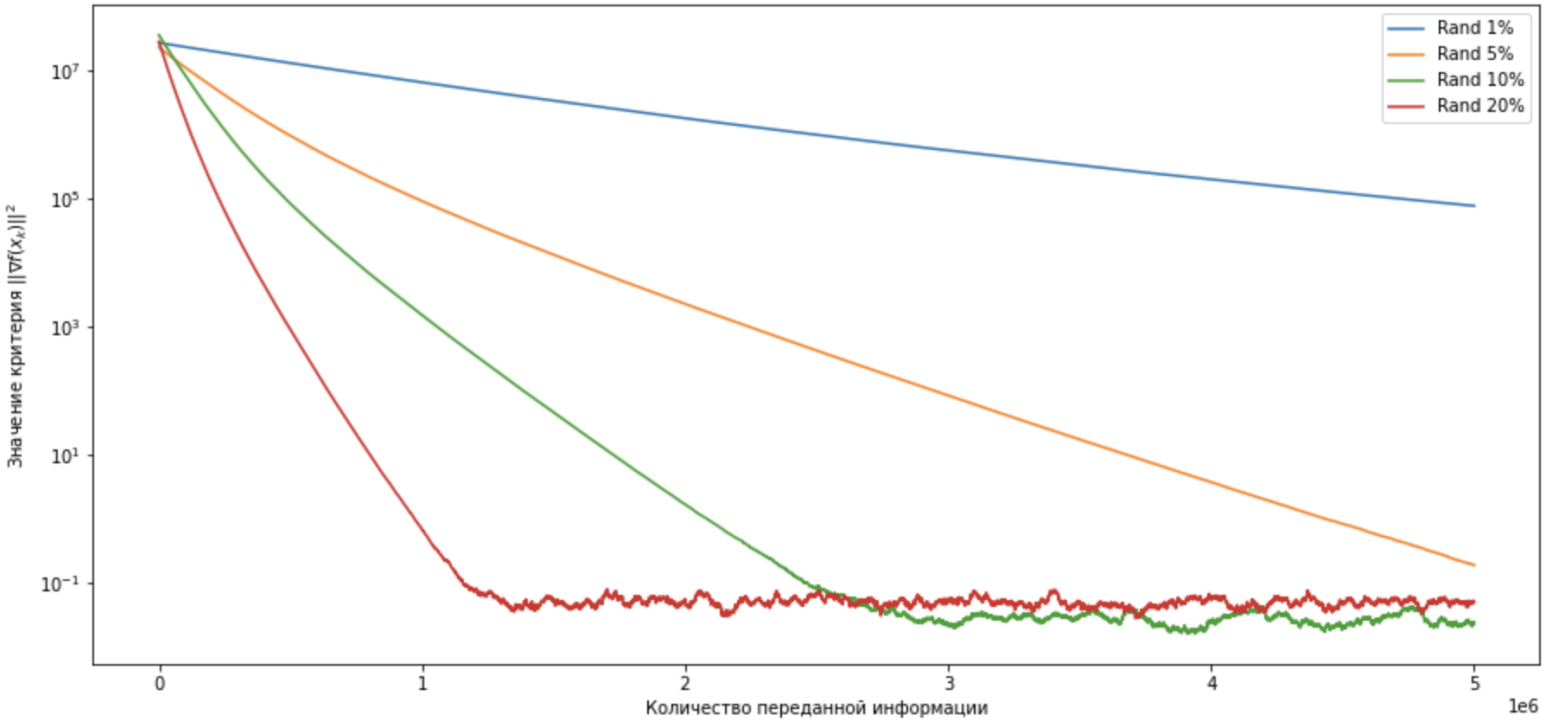



Рисунок: Поведение методов с несмещенным оператором сжатия и постоянным шагом

- В теории шаг подбирался хитро, при постоянnном шаге теория предугадывает ровно этот же эффект – ранний выход на плато.

# Несмещенная компрессия: решаем проблему с плато

- Метод DIANA – QGD с памятью:

---

**Algorithm** DIANA (скетч)

---

1: Каждое устройство $m$ обладает вектором "памяти" $h_0^m = 0$

2: Сервер хранит $h_0 = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} h_0^m = 0$

3: Досылаем на сервер сжатую версию разницы $\mathcal{Q}(\nabla f_m(w^k) - h_k^m)$

4: Обновляем память $h_{k+1}^m = h_k^m + \alpha \mathcal{Q}(\nabla f_m(w^k) - h_k^m)$

5: Сервер вычисляет $g_k = h_k + \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \mathcal{Q}(\nabla f_m(w^k) - h_k^m)$

6: Для апдейта $w_{k+1} = w_k - \gamma g_k$

7: Сервер обновляет $h_{k+1} = h_k + \alpha \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \mathcal{Q}(\nabla f_m(w^k) - h_k^m)$

---

Mishchenko K. et al. Distributed Learning with Compressed Gradient Differences

# QGD и DIANA: сходимость

- **Вопрос:** Какие есть еще вопросы к сходимости/оценкам сходимости?

# QGD и DIANA: сходимость

- **Вопрос:** Какие есть еще вопросы к сходимости/оценкам сходимости? Лучше ли вообще сходится?
- Лучшая оценка на число коммуникаций для неускоренного метода с несмещенной компрессией (DIANA):

$$\mathcal{O}\left(\left[1+\frac{\omega}{M}\right]\frac{L}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Оценка на число коммуникаций для GD:

$$\mathcal{O}\left(\frac{L}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- С точки зрения **числа** коммуникаций методы с компрессией уступают базовым методам – это ожидаемо (плата за сжатие). НО!

# QGD и DIANA: сходимость

- Компрессоры сжимают информацию в $\beta$ раз и типично, что $\beta \geq \omega$.

# QGD и DIANA: сходимость

- Компрессоры сжимают информацию в $\beta$ раз и типично, что $\beta \geq \omega$.
- Лучшая оценка на число информации для неускоренного метода с несмещенной компрессией (DIANA):

$$\mathcal{O}\left(\left[\frac{1}{\beta}+\frac{1}{M}\right]\frac{L}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Оценка на число информации для GD:

$$\mathcal{O}\left(\frac{L}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

# QGD и DIANA: сходимость

- Компрессоры сжимают информацию в $\beta$ раз и типично, что $\beta \geq \omega$.
- Лучшая оценка на число информации для неускоренного метода с несмещенной компрессией (DIANA):

$$\mathcal{O}\left(\left[\frac{1}{\beta}+\frac{1}{M}\right]\frac{L}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Оценка на число информации для GD:

$$\mathcal{O}\left(\frac{L}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Несмещенный компрессор доказуемо улучшает число передаваемой информации, фактор улучшения: $\left[\frac{1}{\beta}+\frac{1}{M}\right]$.

# QGD и DIANA: сходимость

- Компрессоры сжимают информацию в $\beta$ раз и типично, что $\beta \geq \omega$.
- Лучшая оценка на число информации для неускоренного метода с несмещенной компрессией (DIANA):

$$\mathcal{O}\left(\left[\frac{1}{\beta}+\frac{1}{M}\right]\frac{L}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Оценка на число информации для GD:

$$\mathcal{O}\left(\frac{L}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Несмещенный компрессор доказуемо улучшает число передаваемой информации, фактор улучшения: $\left[\frac{1}{\beta}+\frac{1}{M}\right]$.
- Смещенный компрессор не улучшает число передаваемой информации в общем случае.

# Сервера может и не быть

- Часто на практике "централизованные коммуникации через сервер" реализованы без "сервера".
- Архитектура с AllGather/AllReduce процедурой: задан некоторый граф связей/коммуникаций, обмен сообщениями происходит согласно этому графу, в том чсиле можно организовать усреднение.

Chan, E. et al. Collective communication: theory, practice, and experience

# Централизованные коммуникации без сервера

| Operation | Before | After |
|---|---|---|
| Broadcast | Node 0: $x$; Node 1: ; Node 2: ; Node 3: | Node 0: $x$; Node 1: $x$; Node 2: $x$; Node 3: $x$ |
| Reduce(-to-one) | Node 0: $x^{(0)}$; Node 1: $x^{(1)}$; Node 2: $x^{(2)}$; Node 3: $x^{(3)}$ | Node 0: $\sum_j x^{(j)}$; Node 1: ; Node 2: ; Node 3: |
| Scatter | Node 0: $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$; Node 1: ; Node 2: ; Node 3: | Node 0: $x_0$; Node 1: $x_1$; Node 2: $x_2$; Node 3: $x_3$ |
| Gather | Node 0: $x_0$; Node 1: $x_1$; Node 2: $x_2$; Node 3: $x_3$ | Node 0: $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$; Node 1: ; Node 2: ; Node 3: |
| Allgather | Node 0: $x_0$; Node 1: $x_1$; Node 2: $x_2$; Node 3: $x_3$ | Node 0: $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$; Node 1: $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$; Node 2: $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$; Node 3: $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$ |
| Reduce-scatter | Node 0: $x_0^{(0)}$, $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $x_3^{(0)}$; Node 1: $x_0^{(1)}$, $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$; Node 2: $x_0^{(2)}$, $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$, $x_3^{(2)}$; Node 3: $x_0^{(3)}$, $x_1^{(3)}$, $x_2^{(3)}$, $x_3^{(3)}$ | Node 0: $\sum_j x_0^{(j)}$; Node 1: $\sum_j x_1^{(j)}$; Node 2: $\sum_j x_2^{(j)}$; Node 3: $\sum_j x_3^{(j)}$ |
| Allreduce | Node 0: $x^{(0)}$; Node 1: $x^{(1)}$; Node 2: $x^{(2)}$; Node 3: $x^{(3)}$ | Node 0: $\sum_j x^{(j)}$; Node 1: $\sum_j x^{(j)}$; Node 2: $\sum_j x^{(j)}$; Node 3: $\sum_j x^{(j)}$ |

Рисунок: Виды коллективных централизованных коммуникаций без сервера

# Ring AllReduce

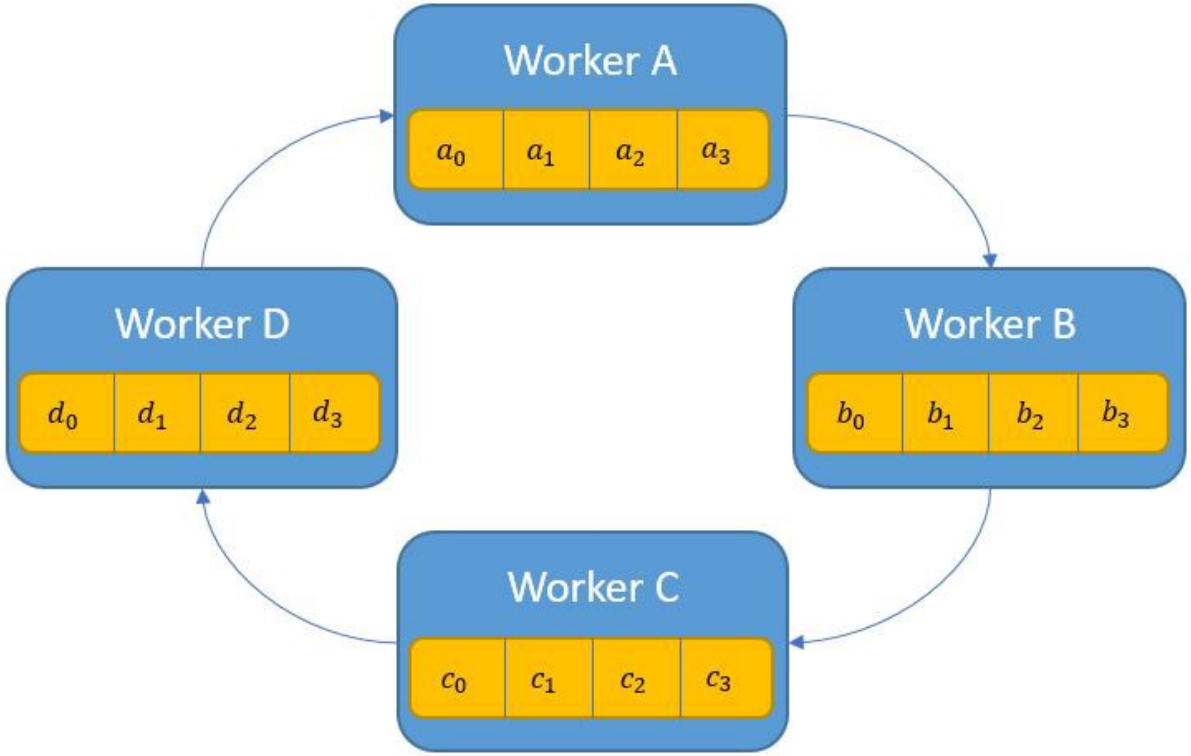



Рисунок: Картинка отсюда

# Ring AllReduce: первый шаг суммирования

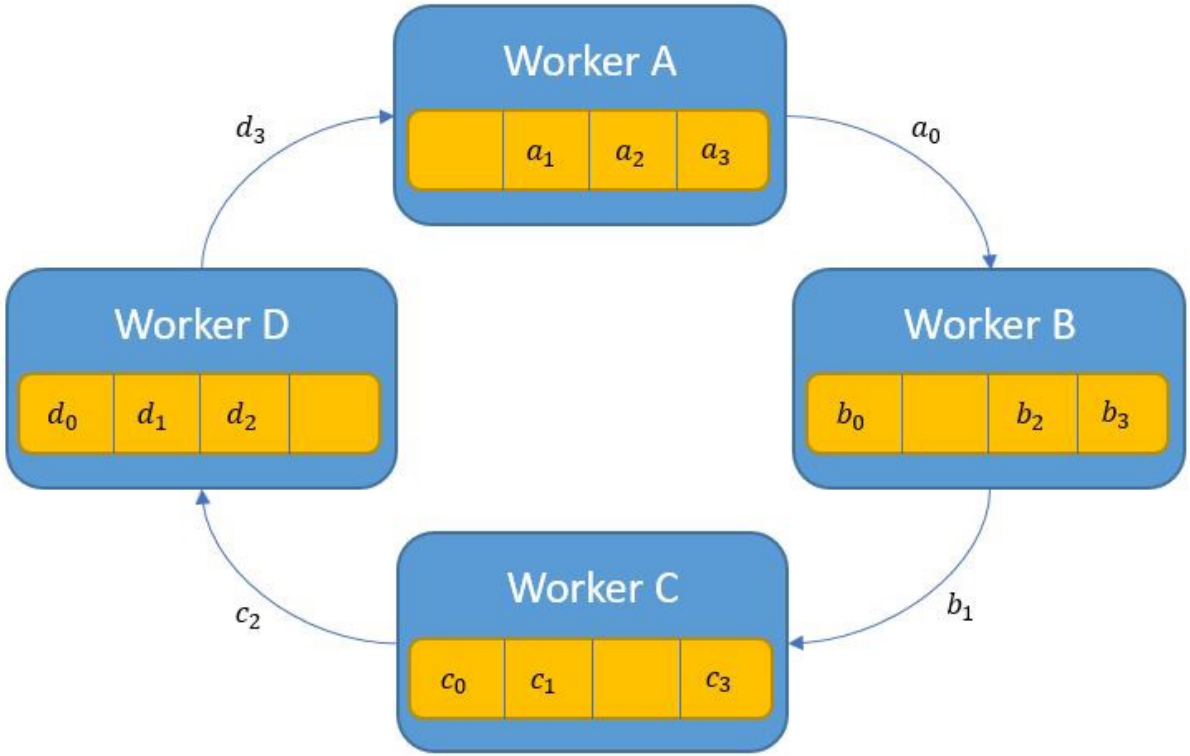



Рисунок: Картинка отсюда

# Ring AllReduce: второй шаг суммирования

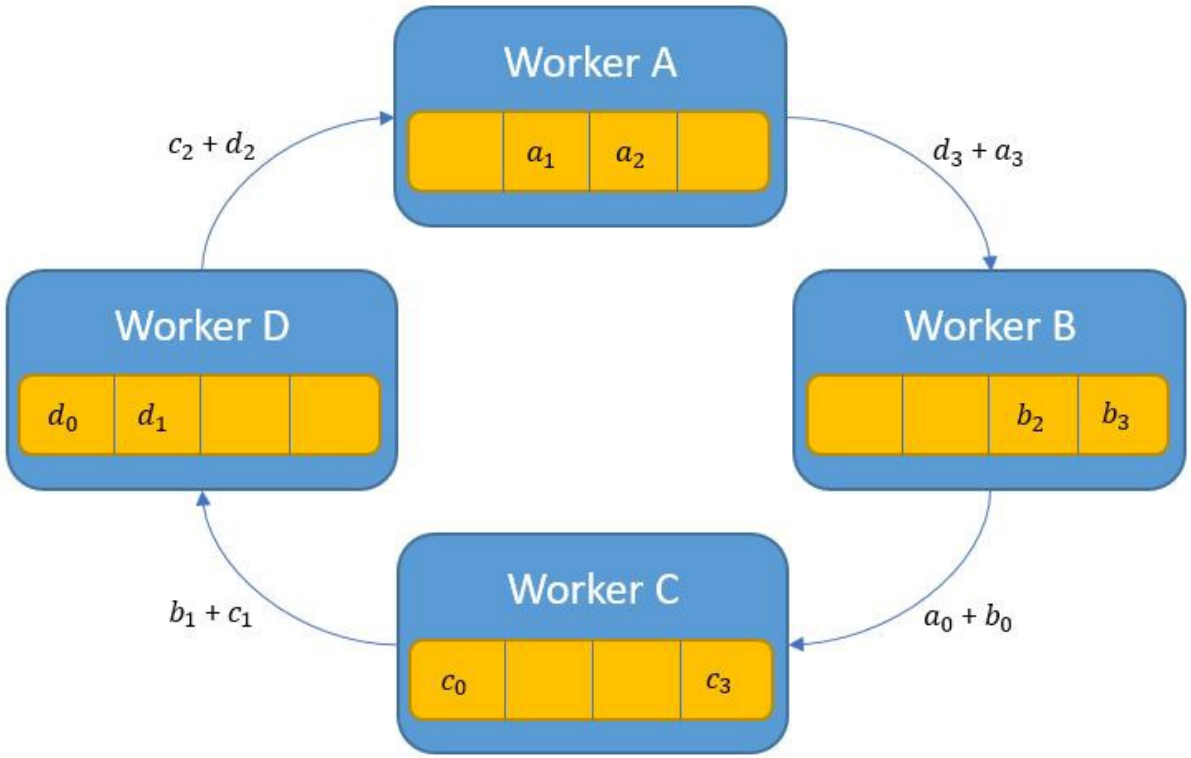



Рисунок: Картинка отсюда

# Ring AllReduce: первый шаг распространения

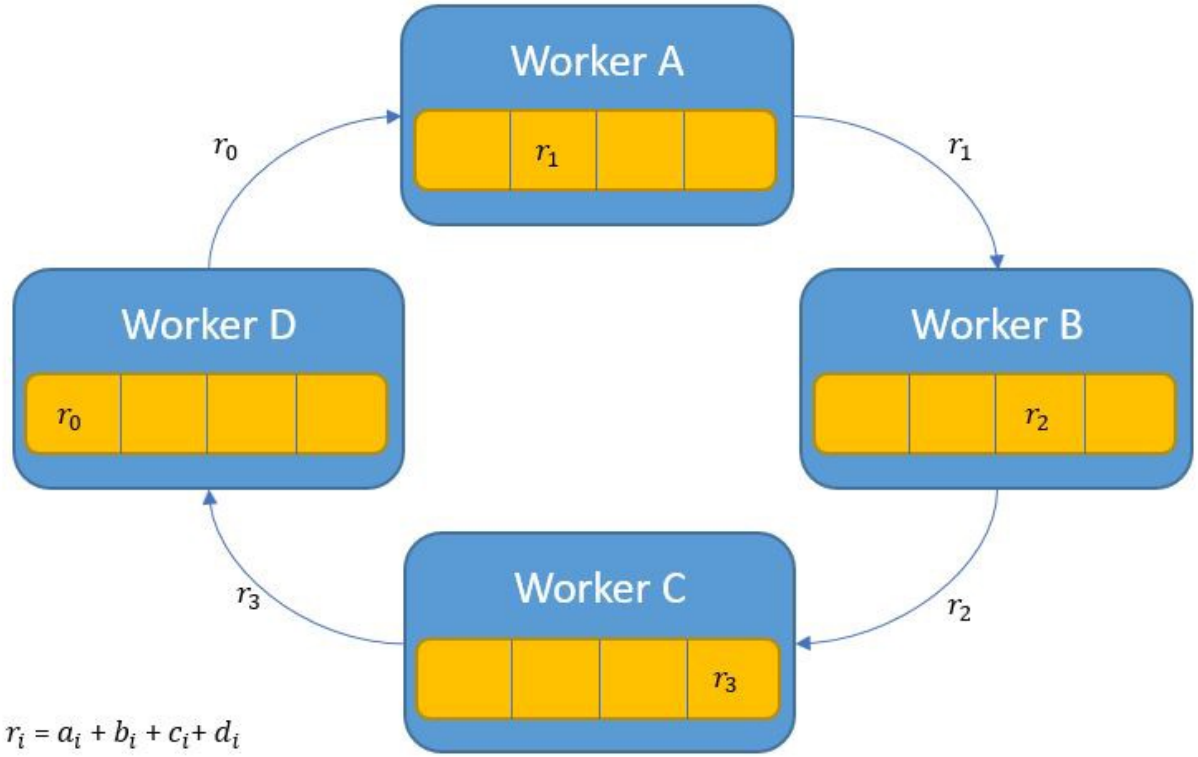



Рисунок: Картинка отсюда

# Ring AllReduce: итог

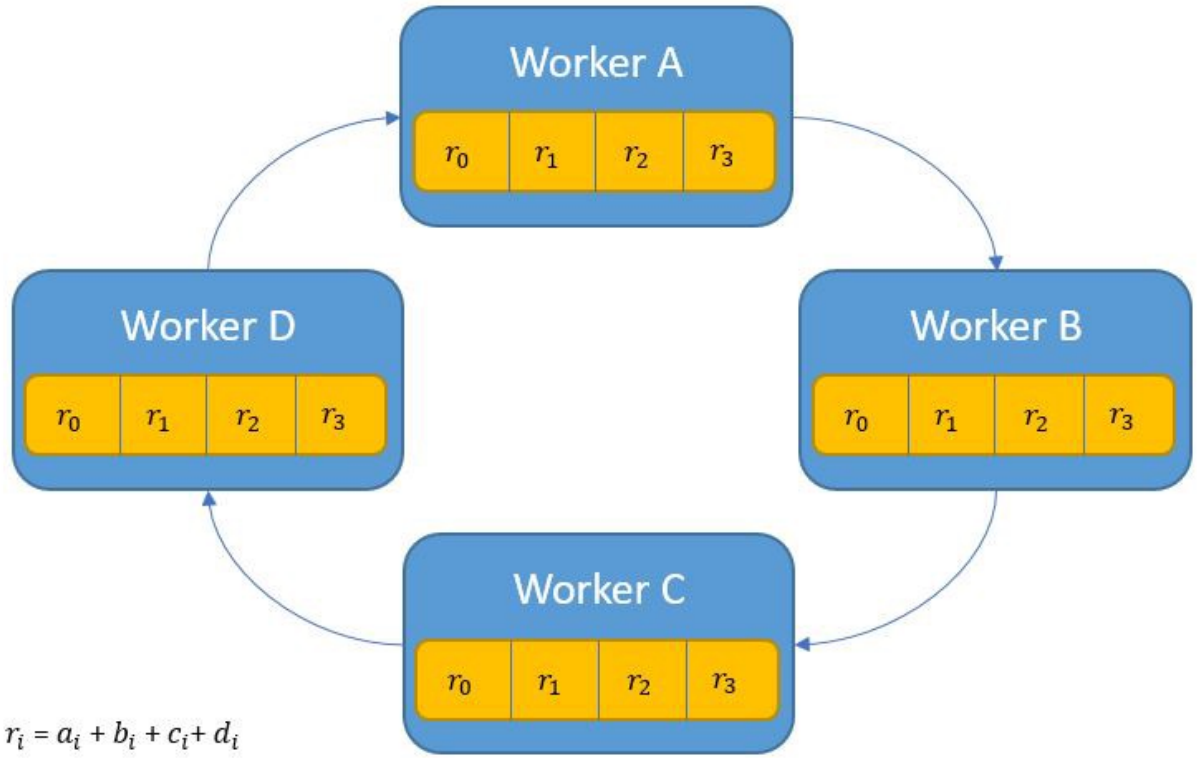



Рисунок: Картинка отсюда

# Квантизированный GD (QGD) с AllReduce

**Algorithm** QGD

**Вход:** размер шага $\gamma > 0$, стартовая точка $w_0 \in \mathbb{R}^d$, количество итераций $K$

**for** $k = 0, 1, \ldots, K-1$ **do**
  **for** $m = 1, \ldots, M$ параллельно **do**
    Вычислить градиент $\nabla f_m(w_k)$ в точке $w_k$
    Независимо сгенерировать $g_{k,m} = \mathcal{Q}(\nabla f_m(w_k))$
    Запустить AllReduce $\{g_{k,m}\}$ и получить $g_k = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} g_{k,m}$
    $w_{k+1} = w_k - \gamma g_k$
  **end for**
**end for**

**Выход:** $w^K$

# Квантизированный GD (QGD) с AllReduce

**Algorithm** QGD

**Вход:** размер шага $\gamma > 0$, стартовая точка $w_0 \in \mathbb{R}^d$, количество итераций $K$

**for** $k = 0, 1, \ldots, K-1$ **do**
  **for** $m = 1, \ldots, M$ параллельно **do**
    Вычислить градиент $\nabla f_m(w_k)$ в точке $w_k$
    Независимо сгенерировать $g_{k,m} = \mathcal{Q}(\nabla f_m(w_k))$
    Запустить AllReduce $\{g_{k,m}\}$ и получить $g_k = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} g_{k,m}$
    $w_{k+1} = w_k - \gamma g_k$
  **end for**
**end for**

**Выход:** $w^K$

- **Вопрос:** Какие проблемы могут появиться у (например) Randk?

# Квантизированный GD (QGD) с AllReduce

**Algorithm** QGD

**Вход:** размер шага $\gamma > 0$, стартовая точка $w_0 \in \mathbb{R}^d$, количество итераций $K$

**for** $k = 0, 1, \ldots, K-1$ **do**
  **for** $m = 1, \ldots, M$ параллельно **do**
    Вычислить градиент $\nabla f_m(w_k)$ в точке $w_k$
    Независимо сгенерировать $g_{k,m} = \mathcal{Q}(\nabla f_m(w_k))$
    Запустить AllReduce $\{g_{k,m}\}$ и получить $g_k = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} g_{k,m}$
    $w_{k+1} = w_k - \gamma g_k$
  **end for**
**end for**

**Выход:** $w^K$

- **Вопрос:** Какие проблемы могут появиться у (например) Randk? Одинаковые ненулевые координаты у разных устройств могут вызывать коллизии.

# PermK: делаем зависимую рандомизацию

## Перестановочный компрессор (зависимый RandK)

Предположим, что $d \geq n$ и $d = qn$, где $q \geq 1$ – целое число. Пусть $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_d)$ – случайная перестановка $\{1, \ldots, d\}$. Тогда для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ имеем следующий оператор сжатия

$$\mathcal{Q}_i(u) = n \cdot \sum_{j=q(i-1)+1}^{qi} u_{\pi_j} e_{\pi_j}.$$

Szlendak, R. et al. Permutation Compressors for Provably Faster Distributed Nonconvex Optimization

# PermK: делаем зависимую рандомизацию

## Перестановочный компрессор (зависимый RandK)

Предположим, что $d \geq n$ и $d = qn$, где $q \geq 1$ – целое число. Пусть $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_d)$ – случайная перестановка $\{1, \ldots, d\}$. Тогда для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ имеем следующий оператор сжатия

$$\mathcal{Q}_i(u) = n \cdot \sum_{j=q(i-1)+1}^{qi} u_{\pi_j} e_{\pi_j}.$$

Szlendak, R. et al. Permutation Compressors for Provably Faster Distributed Nonconvex Optimization

- Дружественна к централизованным коммуникациям без сервера.
- В гомогенном случае имеют физику дешевой пересылки полного градиента.

# Смещенная компрессия

- Случайный выбор – это хорошо, но и тут есть потенциал для улучшения.

## Смещённая компрессия

Будем называть (стохастический) оператор $(x)$ оператором смещённой компрессии, если для любого $x \in \mathbb{R}^d$ выполняется:

$$\mathbb{E}[\|C(x) - x\|_2^2] \leq \left(1 - \frac{1}{\delta}\right) \|x\|_2^2,$$

где $\delta \geq 0$.

# Смещенная компрессия: примеры

## "Жадная" спарсификация (выбор наибольших по модулю компонент)

Рассмотрим стохастический оператор

$$\mathrm{Top}_k(x) = \sum_{i=d-k+1}^{d} x_{(i)} e_{(i)},$$

где $k$ — некоторое фиксированное число из множества $\{1, \ldots, d\}$ (количество компонент вектора $x$, которые мы передаём; например, можно выбрать $k = 1$), при этом координаты отсортированы по модулю: $|x_{(1)}| \leq |x_{(2)}| \leq \ldots \leq |x_{(d)}|$, $(e_1, \ldots, e_d)$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^d$. Можно показать, что данный оператор является смещённой компрессией с константой $\delta = \frac{d}{k}$.

Alistarh D. et al. The convergence of sparsified gradient methods

# Смещенная компрессия: примеры

- Различные примеры компрессоров (спарсификаторы, округления и тд):

  Beznosikov A. et al. On Biased Compression for Distributed Learning
- Практичный смещенный компрессор на основе итеративного SVD разложения:

  Vogels T. et al. PowerSGD: Practical Low-Rank Gradient Compression for Distributed Optimization

# Смещенная компрессия: идея и доказательство в случае 1 ноды

- Использовать тот же подход, что и в несмещенном случае (QGD).

# Смещенная компрессия: идея и доказательство в случае 1 ноды

- Использовать тот же подход, что и в несмещенном случае (QGD).
- Докажем в случае одной ноды:

$$x_{k+1} = x_k - \gamma C(\nabla f(x_k)).$$

Пусть $f$ имеет $L$-Липшицев градиент и является $\mu$-сильно выпуклой.

# Смещенная компрессия: идея и доказательство в случае 1 ноды

- Использовать тот же подход, что и в несмещенном случае (QGD).
- Докажем в случае одной ноды:

$$x_{k+1} = x_k - \gamma C(\nabla f(x_k)).$$

Пусть $f$ имеет $L$-Липшицев градиент и является $\mu$-сильно выпуклой.

- Начнем с того, что воспользуемся Липшицевостью градиента:

$$\begin{aligned} f(w_{k+1}) &= f(w_k - \gamma C(\nabla f(w_k))) \\ &\leq f(w_k) + \langle \nabla f(w_k), -\gamma C(\nabla f(w_k)) \rangle + \frac{L}{2} \| - \gamma C(\nabla f(w_k)) \|^2 \\ &= f(w_k) - \gamma \langle C(\nabla f(w_k)), \nabla f(w_k) \rangle + \frac{\gamma^2 L}{2} \| C(\nabla f(w_k)) \|^2. \end{aligned}$$

# Смещенная компрессия: доказательство в случае 1 ноды

- Определение компрессора:

$$\|\nabla f(w_k)\|^2 - 2\mathbb{E}_C\left[\langle C(\nabla f(w_k)), \nabla f(w_k)\rangle\right] + \mathbb{E}_C\left[\|C(\nabla f(w_k))\|^2\right]$$
$$= \mathbb{E}_C\left[\|C(\nabla f(w_k)) - \nabla f(w_k)\|^2\right] \leq \left(1 - \frac{1}{\delta}\right)\|\nabla f(w_k)\|^2.$$

# Смещенная компрессия: доказательство в случае 1 ноды

- Определение компрессора:

$$\|\nabla f(w_k)\|^2 - 2\mathbb{E}_C\left[\langle C(\nabla f(w_k)), \nabla f(w_k)\rangle\right] + \mathbb{E}_C\left[\|C(\nabla f(w_k))\|^2\right]$$
$$= \mathbb{E}_C\left[\|C(\nabla f(w_k)) - \nabla f(w_k)\|^2\right] \leq \left(1 - \frac{1}{\delta}\right)\|\nabla f(w_k)\|^2.$$

- Откуда:

$$-\gamma\mathbb{E}_C\left[\langle C(\nabla f(w_k)), \nabla f(w_k)\rangle\right] + \frac{\gamma}{2}\mathbb{E}_C\left[\|C(\nabla f(w_k))\|^2\right] \leq -\frac{\gamma}{2\delta}\|\nabla f(w_k)\|^2.$$

# Смещенная компрессия: доказательство в случае 1 ноды

- С двух предыдущих слайдов:

$$f(w_{k+1}) - \leq f(w_k) - \gamma\langle C(\nabla f(w_k)), \nabla f(w_k)\rangle + \frac{\gamma^2 L}{2}\|C(\nabla f(w_k))\|^2.$$

$$-\gamma\mathbb{E}_C\left[\langle C(\nabla f(w_k)), \nabla f(w_k)\rangle\right] + \frac{\gamma}{2}\mathbb{E}_C\left[\|C(\nabla f(w_k))\|^2\right] \leq -\frac{\gamma}{2\delta}\|\nabla f(w_k)\|^2.$$

# Смещенная компрессия: доказательство в случае 1 ноды

- С двух предыдущих слайдов:

$$f(w_{k+1}) - \leq f(w_k) - \gamma\langle C(\nabla f(w_k)), \nabla f(w_k)\rangle + \frac{\gamma^2 L}{2}\|C(\nabla f(w_k))\|^2.$$

$$-\gamma\mathbb{E}_C\left[\langle C(\nabla f(w_k)), \nabla f(w_k)\rangle\right] + \frac{\gamma}{2}\mathbb{E}_C\left[\|C(\nabla f(w_k))\|^2\right] \leq -\frac{\gamma}{2\delta}\|\nabla f(w_k)\|^2.$$

- Сложим, вычтем из обоих частей $f(w^*)$ и возьмем полное мат. ожидание:

$$\mathbb{E}\left[f(w_{k+1}) - f(w^*)\right] \leq \mathbb{E}\left[f(w_k) - f(w^*)\right] - \frac{\gamma}{2}(1-\gamma L)\,\mathbb{E}\left[\|C(\nabla f(w_k))\|^2\right] - \frac{\gamma}{2\delta}\mathbb{E}\left[\|\nabla f(w_k)\|^2\right].$$

# Смещенная компрессия: доказательство в случае 1 ноды

- С двух предыдущих слайдов:

$$f(w_{k+1}) - \leq f(w_k) - \gamma\langle C(\nabla f(w_k)), \nabla f(w_k)\rangle + \frac{\gamma^2 L}{2}\|C(\nabla f(w_k))\|^2.$$

$$-\gamma\mathbb{E}_C\left[\langle C(\nabla f(w_k)), \nabla f(w_k)\rangle\right] + \frac{\gamma}{2}\mathbb{E}_C\left[\|C(\nabla f(w_k))\|^2\right] \leq -\frac{\gamma}{2\delta}\|\nabla f(w_k)\|^2.$$

- Сложим, вычтем из обоих частей $f(w^*)$ и возьмем полное мат. ожидание:

$$\mathbb{E}\left[f(w_{k+1}) - f(w^*)\right] \leq \mathbb{E}\left[f(w_k) - f(w^*)\right] - \frac{\gamma}{2}(1-\gamma L)\,\mathbb{E}\left[\|C(\nabla f(w_k))\|^2\right] - \frac{\gamma}{2\delta}\mathbb{E}\left[\|\nabla f(w_k)\|^2\right].$$

- Возьмем $\gamma \leq \frac{1}{L}$:

$$\mathbb{E}\left[f(w_{k+1}) - f(w^*)\right] \leq \mathbb{E}\left[f(w_k) - f(w^*)\right] - \frac{\gamma}{2\delta}\mathbb{E}\left[\|\nabla f(w_k)\|^2\right].$$

# Смещенная компрессия: доказательство в случае 1 ноды

- С предыдущего слайда:

$$\mathbb{E}\left[f(w_{k+1}) - f(w^*)\right] \leq \mathbb{E}\left[f(w_k) - f(w^*)\right] - \frac{\gamma}{2\delta}\mathbb{E}\left[\|\nabla f(w_k)\|^2\right].$$

# Смещенная компрессия: доказательство в случае 1 ноды

- С предыдущего слайда:

$$\mathbb{E}\left[f(w_{k+1}) - f(w^*)\right] \leq \mathbb{E}\left[f(w_k) - f(w^*)\right] - \frac{\gamma}{2\delta}\mathbb{E}\left[\|\nabla f(w_k)\|^2\right].$$

- Сильная выпуклость (или даже более слабое условие PL):

$$2\mu(f(w_k) - f(w^*)) \leq \|\nabla f(w_k)\|^2.$$

# Смещенная компрессия: доказательство в случае 1 ноды

- С предыдущего слайда:

$$\mathbb{E}\left[f(w_{k+1}) - f(w^*)\right] \leq \mathbb{E}\left[f(w_k) - f(w^*)\right] - \frac{\gamma}{2\delta}\mathbb{E}\left[\|\nabla f(w_k)\|^2\right].$$

- Сильная выпуклость (или даже более слабое условие PL):

$$2\mu(f(w_k) - f(w^*)) \leq \|\nabla f(w_k)\|^2.$$

- Соединим два предыдущих:

$$\mathbb{E}\left[f(w_{k+1}) - f(w^*)\right] \leq \left(1 - \frac{\gamma\mu}{\delta}\right)\mathbb{E}\left[f(w_k) - f(w^*)\right].$$

# Смещенная компрессия: теорема в случае 1 ноды

**Теорема (сходимость QGD со смещенной компрессией в случае 1 ноды)**

Пусть $f$ $\mu$-сильно выпуклая (или PL) и имеет $L$-Липшицев градиент, тогда QGD для одной ноды с шагом $\gamma \leq 1/L$ и со смещенным компрессором с параметром $\delta$ сходится и выполнено:

$$f(w_K) - f(w^*) \leq \left(1 - \frac{\gamma\mu}{\delta}\right)^K (f(w_0) - f(w^*)).$$

Beznosikov A. et al. On Biased Compression for Distributed Learning

# Смещенная компрессия: не так все просто

- Рассмотрим следующую распределенную задачу с $M = 3$, $d = 3$ и локальными функциями:

$$f_1(w) = \langle a, w\rangle^2 + \tfrac{1}{4}\|w\|^2,\ f_2(w) = \langle b, x\rangle^2 + \tfrac{1}{4}\|w\|^2,\ f_3(w) = \langle c, w\rangle^2 + \tfrac{1}{4}\|w\|^2$$

где $a = (-3, 2, 2)$, $b = (2, -3, 2)$ и $c = (2, 2, -3)$.

# Смещенная компрессия: не так все просто

- Рассмотрим следующую распределенную задачу с $M = 3$, $d = 3$ и локальными функциями:

$$f_1(w) = \langle a, w\rangle^2 + \tfrac{1}{4}\|w\|^2,\ f_2(w) = \langle b, x\rangle^2 + \tfrac{1}{4}\|w\|^2,\ f_3(w) = \langle c, w\rangle^2 + \tfrac{1}{4}\|w\|^2$$

  где $a = (-3, 2, 2)$, $b = (2, -3, 2)$ и $c = (2, 2, -3)$.
- **Вопрос:** где у нее оптимум?

# Смещенная компрессия: не так все просто

- Рассмотрим следующую распределенную задачу с $M = 3$, $d = 3$ и локальными функциями:

$$f_1(w) = \langle a, w\rangle^2 + \tfrac{1}{4}\|w\|^2,\ f_2(w) = \langle b, x\rangle^2 + \tfrac{1}{4}\|w\|^2,\ f_3(w) = \langle c, w\rangle^2 + \tfrac{1}{4}\|w\|^2$$

  где $a = (-3, 2, 2)$, $b = (2, -3, 2)$ и $c = (2, 2, -3)$.
- **Вопрос:** где у нее оптимум? $(0, 0, 0)$.

# Смещенная компрессия: не так все просто

- Рассмотрим следующую распределенную задачу с $M = 3$, $d = 3$ и локальными функциями:

$$f_1(w) = \langle a, w\rangle^2 + \tfrac{1}{4}\|w\|^2,\ f_2(w) = \langle b, x\rangle^2 + \tfrac{1}{4}\|w\|^2,\ f_3(w) = \langle c, w\rangle^2 + \tfrac{1}{4}\|w\|^2$$

  где $a = (-3, 2, 2)$, $b = (2, -3, 2)$ и $c = (2, 2, -3)$.
- **Вопрос:** где у нее оптимум? $(0, 0, 0)$.
- Пусть стартовая точка $w_0 = (t, t, t)$ для какого-то $t > 0$. Тогда локальные градиенты:

$$\nabla f_1(w_0) = \tfrac{t}{2}(-11, 9, 9),\quad \nabla f_2(w_0) = \tfrac{t}{2}(9, -11, 9),\quad \nabla f_3(w_0) = \tfrac{t}{2}(9, 9, -11).$$

- **Вопрос:** как будет выглядеть шаг QGD (градиентного спуска с сжатиями), если мы будем использовать $Top1$ компрессию?

# Смещенная компрессия: не так все просто

- Рассмотрим следующую распределенную задачу с $M = 3$, $d = 3$ и локальными функциями:

$$f_1(w) = \langle a, w\rangle^2 + \tfrac{1}{4}\|w\|^2,\ f_2(w) = \langle b, x\rangle^2 + \tfrac{1}{4}\|w\|^2,\ f_3(w) = \langle c, w\rangle^2 + \tfrac{1}{4}\|w\|^2$$

  где $a = (-3, 2, 2)$, $b = (2, -3, 2)$ и $c = (2, 2, -3)$.
- **Вопрос:** где у нее оптимум? $(0, 0, 0)$.
- Пусть стартовая точка $w_0 = (t, t, t)$ для какого-то $t > 0$. Тогда локальные градиенты:

$$\nabla f_1(w_0) = \tfrac{t}{2}(-11, 9, 9),\quad \nabla f_2(w_0) = \tfrac{t}{2}(9, -11, 9),\quad \nabla f_3(w_0) = \tfrac{t}{2}(9, 9, -11).$$

- **Вопрос:** как будет выглядеть шаг QGD (градиентного спуска с сжатиями), если мы будем использовать *Top*1 компрессию?

$$w_1 = (t, t, t) + \eta \cdot \frac{11}{6}(t, t, t) = \left(1 + \frac{11\eta}{6}\right) x_0.$$

- Мы удаляемся от решения геометрически для любого $\eta \geq 0$.

# Смещенная компрессия: компенсация ошибки

- Попробуем запоминать то, что не передали в процессе общения:

$$e_{1,m} = 0 + \gamma \nabla f_m(w_0) - C(0 + \gamma \nabla f_m(w_0)).$$

# Смещенная компрессия: компенсация ошибки

- Попробуем запоминать то, что не передали в процессе общения:

$$e_{1,m} = 0 + \gamma \nabla f_m(w_0) - C(0 + \gamma \nabla f_m(w_0)).$$

- И добавлять это в будущие посылки:

$$C(e_{1,m} + \gamma \nabla f_m(w_1))$$

# Смещенная компрессия: компенсация ошибки

- Попробуем запоминать то, что не передали в процессе общения:

$$e_{1,m} = 0 + \gamma \nabla f_m(w_0) - C(0 + \gamma \nabla f_m(w_0)).$$

- И добавлять это в будущие посылки:

$$C(e_{1,m} + \gamma \nabla f_m(w_1))$$

- На произвольной итерации это записывается так:

$$\text{Посылка: } C(e_{k,m} + \gamma \nabla f_m(w_k)),$$
$$e_{k+1,m} = e_{k,m} + \gamma \nabla f_m(w_k) - C(e_{k,m} + \gamma \nabla f_m(w_k))$$

# Смещенная компрессия: компенсация ошибки

- Попробуем запоминать то, что не передали в процессе общения:

$$e_{1,m} = 0 + \gamma \nabla f_m(w_0) - C(0 + \gamma \nabla f_m(w_0)).$$

- И добавлять это в будущие посылки:

$$C(e_{1,m} + \gamma \nabla f_m(w_1))$$

- На произвольной итерации это записывается так:

$$\text{Посылка: } C(e_{k,m} + \gamma \nabla f_m(w_k)),$$
$$e_{k+1,m} = e_{k,m} + \gamma \nabla f_m(w_k) - C(e_{k,m} + \gamma \nabla f_m(w_k))$$

- Это техника называется компенсация ошибка (error feedback).

Stich S. et al. Sparsified SGD with memory

# QGD с error feedback

**Algorithm** QGD с error feedback

**Вход:** Размер шага $\gamma > 0$, стартовая точка $w_0 \in \mathbb{R}^d$, стартовые ошибки $e_{0,m} = 0$ для всех $m$ от 1 до $M$, количество итераций $K$

**for** $k = 0, 1, \ldots, K-1$ **do**
  Отправить $x_k$ всем рабочим ▷ выполняется сервером
  **for** $m = 1, \ldots, M$ параллельно **do**
    Принять $w_k$ от мастера ▷ выполняется рабочими
    Вычислить градиент $\nabla f(w_k)$ в точке $w_k$ ▷ выполняется рабочими
    Сгенерировать $g_{k,m} = C(e_{k,m} + \gamma \nabla f(w_k))$ ▷ выполняется рабочими
    Вычислить $e_{k+1,m} = e_{k,m} + \gamma \nabla f_m(w_k) - g_{k,m}$ ▷ выполняется рабочими
    Отправить $g_{k,m}$ мастеру ▷ выполняется рабочими
  **end for**
  Принять $g_{k,m}$ от всех рабочих ▷ выполняется сервером
  Вычислить $g_k = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} g_{k,m}$ ▷ выполняется сервером
  $w_{k+1} = w_k - g_k$ ▷ выполняется сервером
**end for**

**Выход:** $w_K$

# QGD с error feedback: сходимость

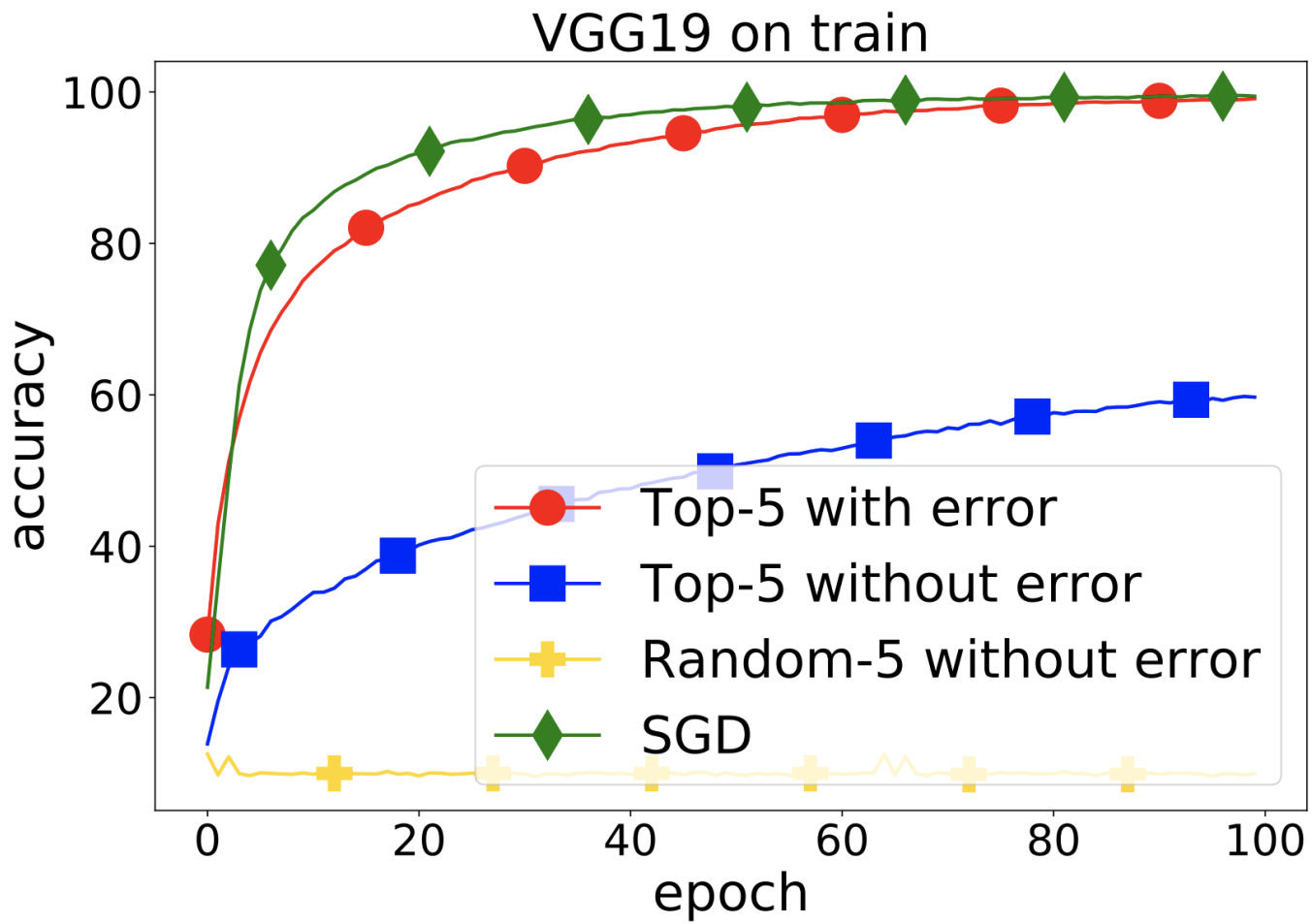



Рисунок: Точность в ходе обучения VGG19 на CIFAR10 с использование разных компрессоров

# QGD с error feedback: сходимость

## Теорема GD с error feedback

Пусть все локальные функции $f_m$ являются $\mu$-сильно выпуклыми и имеют $L$-Липшицев градиент, тогда если $\eta \leq \frac{1}{28\delta L}$, то

$$\mathbb{E}\left[f(\tilde{x}_K) - f(x^*)\right] \leq \mathcal{O}\left(\delta L\|x_0 - x^*\|^2 \exp\left(-\frac{\gamma\mu K}{2}\right) + \frac{\delta}{\mu K} \cdot \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\|\nabla f_m(x^*)\|^2\right).$$

Stich S. and Karimireddy S. The error-feedback framework: Better rates for SGD with delayed gradients and compressed communication

Beznosikov A. et al. On Biased Compression for Distributed Learning

- Та же самая проблема, что и у QGD – второй член в оценке по-хорошему нужно устранить.

# Смещенная компрессия: решение вопроса с плато

- Идкя похожа на DIANA: память + сжатие разности

**Algorithm** EF21 (скетч)

1: Каждое устройство $m$ обладает вектором "памяти" $g_0^m = 0$

2: Сервер хранит $h_0 = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} h_0^m = 0$

3: Досылаем на сервер сжатую версию разницы $C(\nabla f_m(w^k) - h_k^m)$

4: Обновляем память $h_{k+1}^m = h_k^m + C(\nabla f_m(w^k) - h_k^m)$

5: Сервер вычисляет $h_{k+1} = h_k + \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} C(\nabla f_m(w^k) - h_k^m)$

6: Для апдейта $w_{k+1} = w_k - \gamma h_{k+1}$

Richtarik P. et al. EF21: A New, Simpler, Theoretically Better, and Practically Faster Error Feedback

# Несмещенная против смещенной

- Лучшая оценка на число коммуникаций для неускоренного метода с несмещенной компрессией (DIANA):

$$\mathcal{O}\left(\left[1+\frac{\omega}{M}\right]\frac{L}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Лучшая оценка на число коммуникаций для неускоренного метода со смещенной компрессией (EF-21):

$$\mathcal{O}\left([1+\delta]\frac{L}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Уже обсуждалось, что эти оценки хуже, чем для базового GD.

# Несмещенная против смещенной

- Компрессоры сжимают информацию в $\beta$ раз и типично, что $\beta \geq \omega$ и $\beta \geq \delta$.

# Несмещенная против смещенной

- Компрессоры сжимают информацию в $\beta$ раз и типично, что $\beta \geq \omega$ и $\beta \geq \delta$.
- Лучшая оценка на число информации для неускоренного метода с несмещенной компрессией (DIANA):

$$\mathcal{O}\left(\left[\frac{1}{\beta}+\frac{1}{M}\right]\frac{L}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Как уже обсуждалось, несмещенный компрессор доказуемо улучшает число передаваемой информации.

# Несмещенная против смещенной

- Компрессоры сжимают информацию в $\beta$ раз и типично, что $\beta \geq \omega$ и $\beta \geq \delta$.
- Лучшая оценка на число информации для неускоренного метода с несмещенной компрессией (DIANA):

$$\mathcal{O}\left(\left[\frac{1}{\beta} + \frac{1}{M}\right]\frac{L}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Как уже обсуждалось, несмещенный компрессор доказуемо улучшает число передаваемой информации.
- Смещенный компрессор имеет оценку:

$$\mathcal{O}\left(\left[\frac{1}{\beta} + \frac{\delta}{\beta}\right]\frac{L}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Смещенный компрессор не улучшает число передаваемой информации в общем случае. **И это открытый вопрос: как увидеть теоретическое превосходство смещенных операторов, которое часто проявляется на практике.**

# Локальный подход

# Идея – больше локальных вычислений

- В базовом подходе коммуникации происходят каждую итерацию.
- Если считать (стохастические) градиенты значительно дешевле, почему бы не считать несколько раз между коммуникациями.

# Локальный градиентный спуск

Идея метода:

- Делать локальные шаги:

$$x_m^{k+1} = x_m^k - \gamma \nabla f_m(x_m^k, \xi_m^k).$$

- Каждую $t$ую итерацию пересылать текущий $x_m^k$ на сервер. Сервер усредняет $x^k = \frac{1}{M} \sum\limits_{m=1}^{M} x_m^k$, и пересылает $x^k$ устройствам. Устройства обновляют: $x_m^k = x^k$.
- Централизованный SGD это Локальный SGD с $K = 1$.

# Сходимость

- Типичная сходимость такого типа методов:

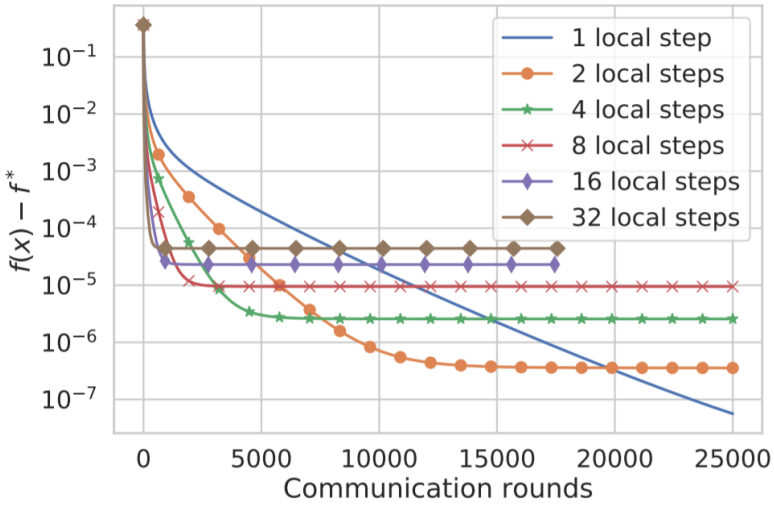



Рисунок: Сходимость Локального метода на практике для логистической регрессии.

- Быстрее с точки зрения коммуникаций, хуже качество придельной точности.


Khaled A. et al. Tighter Theory for Local SGD on Identical and Heterogeneous Data

# Сходимость

- **Вопрос:** из-за чего возникает такой эффект? Он возникает из-за разнородности локальных данных на разных устройствах.
- В верхних оценках сходимости метода это тоже проявляется:

$$\mathcal{O}\left(\frac{\|x^0 - x^*\|^2}{\gamma T} + \frac{\gamma \sigma_{opt}^2}{M}\right),$$

где $\gamma \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{Lt}\right)$ – шаг, $K$ – кол-во локальных итераций на каждом устройстве, . Оценка дана для случая выпуклых и $L$-гладких $f_m$.

Khaled A. et al. Tighter Theory for Local SGD on Identical and Heterogeneous Data

- Более того, фактор $\sigma_{opt}^2$ не устраняется.

Glasgow M.R. et al. Sharp bounds for federated averaging (local sgd) and continuous perspective

# Физика проблемы

- Далеко от решения:

- Близко к решению:

# Решаем проблему

- **Вопрос:** проблема локального метода – сходимость к окрестности. Как ее можно решить?

# Решаем проблему

- **Вопрос:** проблема локального метода – сходимость к окрестности. Как ее можно решить?
- Регуляризация локальной задачи:

$$\tilde{f}_m(x) := f_m(x) + \frac{\lambda}{2}\|x - v\|^2,$$

где $v$ – некоторая референсная точка.

Karimireddy S. P. SCAFFOLD: Stochastic Controlled Averaging for Federated Learning

# А вообще чего хотим достичь?

- Нижние оценки:

$$K = \Omega\left(\sqrt{\frac{L}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

  $L$ и $\mu$ – константы гладкости и сильной выпуклости $f$.
- **Вопрос:** какой метод даст такие оценки?

# А вообще чего хотим достичь?

- Нижние оценки:

$$K = \Omega\left(\sqrt{\frac{L}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

  $L$ и $\mu$ – константы гладкости и сильной выпуклости $f$.
- **Вопрос:** какой метод даст такие оценки? Распределенная версия метода Нестерова с 1 локальным шагом между коммуникациями.
- Отметим, что локальные методы стали для стохастических постановок.

# А вообще чего хотим достичь?

- Нижние оценки:

$$K = \Omega\left(\sqrt{\frac{L}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

  $L$ и $\mu$ – константы гладкости и сильной выпуклости $f$.
- **Вопрос:** какой метод даст такие оценки? Распределенная версия метода Нестерова с 1 локальным шагом между коммуникациями.
- Отметим, что локальные методы стали для стохастических постановок.
- Но и тут в общем случае нет улучшений.

  Woodworth B. The Min-Max Complexity of Distributed Stochastic Convex Optimization with Intermittent Communication
- Но есть постановки, где локальные методы выстреливают.

# Data similarity

# Data similarity

- Распределенная задача обучения:

$$f(w) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} f_m(w) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ell(w, z_i)\right],$$

где $z_i$ – элемент выборки $(x_i, y_i)$, $\ell$ – функция потерь (в нее зашита $l$ и $g$).

# Data similarity

- Распределенная задача обучения:

$$f(w) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} f_m(w) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ell(w, z_i)\right],$$

  где $z_i$ – элемент выборки $(x_i, y_i)$, $\ell$ – функция потерь (в нее зашита $l$ и $g$).
- Предположим, что мы можем разбить обучающую выборку равномерно между устройствами (например, если используются кластерные или коллаборативные вычисления на открытых данных).

# Data similarity

- Распределенная задача обучения:

$$f(w) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} f_m(w) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ell(w, z_i)\right],$$

  где $z_i$ – элемент выборки $(x_i, y_i)$, $\ell$ – функция потерь (в нее зашита $l$ и $g$).
- Предположим, что мы можем разбить обучающую выборку равномерно между устройствами (например, если используются кластерные или коллаборативные вычисления на открытых данных).
- Это дает похожесть локальных функций потерь.

# Data similarity

- Распределенная задача обучения:

$$f(w) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} f_m(w) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ell(w, z_i)\right],$$

  где $z_i$ – элемент выборки $(x_i, y_i)$, $\ell$ – функция потерь (в нее зашита $l$ и $g$).
- Предположим, что мы можем разбить обучающую выборку равномерно между устройствами (например, если используются кластерные или коллаборативные вычисления на открытых данных).
- Это дает похожесть локальных функций потерь.
- Утверждается, что для любого $w$

$$\|\nabla^2 f_m(w) - \nabla^2 f(w)\| \leq \delta.$$

# Матричное неравенство Хёфдинга

## Теорема (Матричное неравенство Хёфдинга)

Рассмотрим конечную последовательность случайных квадратных матриц $\{X_i\}_{i=1}^N$. Пусть в этой последовательности матрицы независимы, эрмитовы и имеют размерность $d$. Предположим так же, что $\mathbb{E}[X_i] = 0$, и $X_i^2 \preceq A^2$ почти наверное, где $A$ – неслучайная эрмитова матрица. Тогда с вероятностью $1 - p$ выполнено, что

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} X_i \right\| \leq \sqrt{8N\|A^2\| \cdot \ln(d/p)}.$$


Tropp J. An introduction to matrix concentration inequalities

Tropp J. User-friendly tail bounds for sums of random matrices

# Параметр схожести

- Локальная функция потерь:

$$f_m(w) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ell(w, z_i).$$

- $\ell$ – $L$-гладкая ($L$-Липшицев градиент), выпуклая, дважды дифференцируемая функция (например, квадратичная или логрегрессия). Тогда имеем $\nabla^2\ell(w, z_i) \preceq LI$ для любого $w$ и $z_i$ (здесь $I$ – единичная матрица.).
- Распределим все данные равномерно по всем нодам. $X_i = \frac{1}{N}\left[\nabla\ell(w, z_i) - \nabla f(w)\right]$. Легко проверить, что все условия матричного неравенства Хёфдинга для нее выполнены, в частности, $A^2 = \frac{4L^2}{N^2}I$.

# Параметр схожести: итог

- В итоге имеем

$$\|\nabla^2 f_m(w) - \nabla^2 f(w)\| \leq \delta \sim \frac{L}{\sqrt{N}}.$$

# Параметр схожести: итог

- В итоге имеем

$$\|\nabla^2 f_m(w) - \nabla^2 f(w)\| \leq \delta \sim \frac{L}{\sqrt{N}}.$$

- Для квадратичных задач можно получить оценку вида:

$$\|\nabla^2 f_m(w) - \nabla^2 f(w)\| \leq \delta \sim \frac{L}{N}.$$


Hendrikx H. et al. Statistically Preconditioned Accelerated Gradient Method for Distributed Optimization

# Параметр схожести: итог

- В итоге имеем

$$\|\nabla^2 f_m(w) - \nabla^2 f(w)\| \leq \delta \sim \frac{L}{\sqrt{N}}.$$

- Для квадратичных задач можно получить оценку вида:

$$\|\nabla^2 f_m(w) - \nabla^2 f(w)\| \leq \delta \sim \frac{L}{N}.$$


Hendrikx H. et al. Statistically Preconditioned Accelerated Gradient Method for Distributed Optimization

- В любом случае следует вывод: чем больше размер локальной выборки, тем меньше параметр схожести (похожи между собой гессианы).

# Метод в общем виде

- Рассмотрим зеркальный спуск:

$$w_{k+1} = \arg\min_{w \in \mathbb{R}^d} \left( \gamma \langle \nabla f(w_k), w \rangle + V(w, w_k) \right),$$

где $V(x, y)$ – дивергенция Брегмана, порожденная функцией строго-выпуклой функцией $\varphi(x)$:

$$V(x, y) = \varphi(x) - \varphi(y) - \langle \nabla \varphi(y); x - y \rangle.$$

# Метод в общем виде

- Рассмотрим зеркальный спуск:

$$w_{k+1} = \arg\min_{w \in \mathbb{R}^d} \left( \gamma \langle \nabla f(w_k), w \rangle + V(w, w_k) \right),$$

где $V(x, y)$ – дивергенция Брегмана, порожденная функцией строго-выпуклой функцией $\varphi(x)$:

$$V(x, y) = \varphi(x) - \varphi(y) - \langle \nabla \varphi(y); x - y \rangle.$$

- **Вопрос:** Какой метод получится, если $\varphi(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$?

# Метод в общем виде

- Рассмотрим зеркальный спуск:

$$w_{k+1} = \arg\min_{w \in \mathbb{R}^d} \left( \gamma \langle \nabla f(w_k), w \rangle + V(w, w_k) \right),$$

где $V(x, y)$ – дивергенция Брегмана, порожденная функцией строго-выпуклой функцией $\varphi(x)$:

$$V(x, y) = \varphi(x) - \varphi(y) - \langle \nabla \varphi(y); x - y \rangle.$$

- **Вопрос:** Какой метод получится, если $\varphi(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$?
  Градиентный спуск.

# Сходимость в общем виде

## Определение (относительная гладкость и сильная выпуклость)

Пусть $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ является выпуклой и дважды дифференцируемой. Будем говорить, что функция $f$ является $L_\varphi$-гладкой и $\mu_\varphi$-сильно выпуклой относительно $\varphi$, если для любого $x \in \mathbb{R}^d$ выполнено

$$\mu_\varphi \nabla^2 \varphi(x) \preceq \nabla^2 f(x) \preceq L_\varphi \nabla^2 \varphi(x),$$

или эквивалентно для любых $x, y \in \mathbb{R}^d$

$$\mu_\varphi V(x, y) \leq f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y); x - y \rangle \leq L_\varphi V(x, y).$$

Lu H. et al. Relatively-Smooth Convex Optimization by First-Order Methods, and Applications

# Сходимость в общем виде: доказательство

- Первое условие оптимальности для шага зеркального спуска:

$$\gamma \nabla f(w_k) + \nabla \varphi(w_{k+1}) - \nabla \varphi(w_k) = 0.$$

# Сходимость в общем виде: доказательство

- Первое условие оптимальности для шага зеркального спуска:

$$\gamma \nabla f(w_k) + \nabla \varphi(w_{k+1}) - \nabla \varphi(w_k) = 0.$$

- Из него (здесь $w^*$ – оптимум):

$$\langle \gamma \nabla f(w_k) + \nabla \varphi(w_{k+1}) - \nabla \varphi(w_k), w_{k+1} - w^* \rangle = 0.$$

$$\begin{aligned} \langle \gamma \nabla f(w_k), w^{k+1} - w^* \rangle &= \langle \nabla \varphi(w_k) - \nabla \varphi(w_{k+1}), w^{k+1} - w^* \rangle \\ &= V(w^*, w_k) - V(w^*, w_{k+1}) - V(w_{k+1}, w_k). \end{aligned}$$

(последнее утверждение называется теоремой Пифагора для дивергенций Брегмана и проверяется по определению)

# Сходимость в общем виде: доказательство

- Первое условие оптимальности для шага зеркального спуска:

$$\gamma \nabla f(w_k) + \nabla \varphi(w_{k+1}) - \nabla \varphi(w_k) = 0.$$

- Из него (здесь $w^*$ – оптимум):

$$\langle \gamma \nabla f(w_k) + \nabla \varphi(w_{k+1}) - \nabla \varphi(w_k), w_{k+1} - w^* \rangle = 0.$$

$$\begin{aligned}\langle \gamma \nabla f(w_k), w^{k+1} - w^* \rangle &= \langle \nabla \varphi(w_k) - \nabla \varphi(w_{k+1}), w^{k+1} - w^* \rangle \\ &= V(w^*, w_k) - V(w^*, w_{k+1}) - V(w_{k+1}, w_k).\end{aligned}$$

(последнее утверждение называется теоремой Пифагора для дивергенций Брегмана и проверяется по определению)

- Небольшие перестановки дадут:

$$\begin{aligned}\langle \gamma \nabla f(w_k), w_{k+1} - w_k \rangle + V(w_{k+1}, w_k) \\ = V(w^*, w_k) - V(w^*, w_{k+1}) - \langle \gamma \nabla f(w_k), w_k - w^* \rangle.\end{aligned}$$

# Сходимость в общем виде: доказательство

- Подставим $\gamma = \frac{1}{L_\varphi}$:

$$\begin{aligned}\langle \nabla f(w_k), w^{k+1} - w^k \rangle + L_\varphi V(w_{k+1}, w_k) \\ = L_\varphi V(w^*, w_k) - L_\varphi V(w^*, w_{k+1}) \\ - \langle \nabla f(w_k), w_k - w^* \rangle.\end{aligned}$$

# Сходимость в общем виде: доказательство

- Подставим $\gamma = \frac{1}{L_\varphi}$:

$$\begin{aligned}\langle \nabla f(w_k), w^{k+1} - w^k \rangle + L_\varphi V(w_{k+1}, w_k) \\ = L_\varphi V(w^*, w_k) - L_\varphi V(w^*, w_{k+1}) \\ - \langle \nabla f(w_k), w_k - w^* \rangle.\end{aligned}$$

- Воспользуемся определением гладкость относительно $\varphi$ с $x = w_{k+1}$, $y = w_k$:

$$f(w_{k+1}) - f(w_k) \leq \langle \nabla f(w_k); w_{k+1} - w_k \rangle + L_\varphi V(w_{k+1}, w_k).$$

# Сходимость в общем виде: доказательство

- Подставим $\gamma = \frac{1}{L_\varphi}$:

$$\begin{aligned}\langle \nabla f(w_k), w^{k+1} - w^k \rangle + L_\varphi V(w_{k+1}, w_k) \\ = L_\varphi V(w^*, w_k) - L_\varphi V(w^*, w_{k+1}) \\ - \langle \nabla f(w_k), w_k - w^* \rangle.\end{aligned}$$

- Воспользуемся определением гладкость относительно $\varphi$ с $x = w_{k+1}$, $y = w_k$:

$$f(w_{k+1}) - f(w_k) \leq \langle \nabla f(w_k); w_{k+1} - w_k \rangle + L_\varphi V(w_{k+1}, w_k).$$

- Соединим два предыдущих:

$$f(w_{k+1}) - f(w_k) \leq L_\varphi V(w^*, w_k) - L_\varphi V(w^*, w_{k+1}) - \langle \nabla f(w_k), w_k - w$$

# Сходимость в общем виде: доказательство

- С предыдущего слайда:

$$f(w_{k+1}) - f(w_k) \leq L_\varphi V(w^*, w_k) - L_\varphi V(w^*, w_{k+1}) - \langle \nabla f(w_k), w_k - w^* \rangle.$$

# Сходимость в общем виде: доказательство

- С предыдущего слайда:

$$f(w_{k+1}) - f(w_k) \leq L_\varphi V(w^*, w_k) - L_\varphi V(w^*, w_{k+1}) - \langle \nabla f(w_k), w_k - w^* \rangle.$$

- Относительная сильная выпуклость:

$$\mu_\varphi V(w^*, w_k) \leq f(w^*) - f(w_k) - \langle \nabla f(w_k); w^* - w_k \rangle$$

# Сходимость в общем виде: доказательство

- С предыдущего слайда:

$$f(w_{k+1}) - f(w_k) \leq L_\varphi V(w^*, w_k) - L_\varphi V(w^*, w_{k+1}) - \langle \nabla f(w_k), w_k - w^* \rangle.$$

- Относительная сильная выпуклость:

$$\mu_\varphi V(w^*, w_k) \leq f(w^*) - f(w_k) - \langle \nabla f(w_k); w^* - w_k \rangle$$

- Сложим два предыдущих и немного поперемещаем:

$$f(w_{k+1}) - f(w^*) \leq (L_\varphi - \mu_\varphi) V(w^*, w_k) - L_\varphi V(w^*, w_{k+1}).$$

# Сходимость в общем виде: доказательство

- С предыдущего слайда:

$$f(w_{k+1}) - f(w_k) \leq L_\varphi V(w^*, w_k) - L_\varphi V(w^*, w_{k+1}) - \langle \nabla f(w_k), w_k - w^* \rangle.$$

- Относительная сильная выпуклость:

$$\mu_\varphi V(w^*, w_k) \leq f(w^*) - f(w_k) - \langle \nabla f(w_k); w^* - w_k \rangle$$

- Сложим два предыдущих и немного поперемещаем:

$$f(w_{k+1}) - f(w^*) \leq (L_\varphi - \mu_\varphi) V(w^*, w_k) - L_\varphi V(w^*, w_{k+1}).$$

- В силу того, что $w^*$ – оптимум:

$$V(w^*, w_{k+1}) \leq \left(1 - \frac{\mu_\varphi}{L_\varphi}\right) V(w^*, w_k).$$

# Сходимость в общем виде: теорема

**Теорема (сходимость зеркального спуска)**

Пусть $\varphi$ и $f$ удовлетворяют определению выше, тогда зеркальный спуск с шагом $\gamma = \frac{1}{L_\varphi}$ сходится и выполнено:

$$V(w^*, w_K) \leq \left(1 - \frac{\mu_\varphi}{L_\varphi}\right)^K V(w^*, w_0).$$

Lu H. et al. Relatively-Smooth Convex Optimization by First-Order Methods, and Applications

# Метод для задачи data similarity

- Зеркальный спуск:

$$w_{k+1} = \arg\min_{w \in \mathbb{R}^d} \left(\gamma \langle \nabla f(w_k), w \rangle + V(w, w_k)\right),$$

где с дивергенция Брегмана $V(x, y)$, порожденной функцией $\varphi(x)$ (тут нужно потребовать, чтобы $f_1$ была выпуклой):

$$\varphi(x) = f_1(x) + \frac{\delta}{2}\|x\|^2.$$

Функция $f_1$ хранится на сервере.

# Метод для задачи data similarity

- Зеркальный спуск:

$$w_{k+1} = \arg\min_{w \in \mathbb{R}^d} \left( \gamma \langle \nabla f(w_k), w \rangle + V(w, w_k) \right),$$

где с дивергенция Брегмана $V(x, y)$, порожденной функцией $\varphi(x)$ (тут нужно потребовать, чтобы $f_1$ была выпуклой):

$$\varphi(x) = f_1(x) + \frac{\delta}{2}\|x\|^2.$$

Функция $f_1$ хранится на сервере.

- **Вопрос:** Какое число коммуникаций происходит за $K$ итераций такого зеркального спуска?

# Метод для задачи data similarity

- Зеркальный спуск:

$$w_{k+1} = \arg\min_{w \in \mathbb{R}^d} \left( \gamma \langle \nabla f(w_k), w \rangle + V(w, w_k) \right),$$

где с дивергенция Брегмана $V(x, y)$, порожденной функцией $\varphi(x)$ (тут нужно потребовать, чтобы $f_1$ была выпуклой):

$$\varphi(x) = f_1(x) + \frac{\delta}{2}\|x\|^2.$$

Функция $f_1$ хранится на сервере.

- **Вопрос:** Какое число коммуникаций происходит за $K$ итераций такого зеркального спуска? $K$ коммуникаций (количество подсчетов градиента $\nabla f$), вычисления $\arg\min$ требуют только вычислений на сервере.

# Метод для задачи data similarity

**Algorithm** Зеркальный спуск для задачи data similarity

**Вход:** Размер шага $\gamma > 0$, стартовая точка $w^0 \in \mathbb{R}^d$, количество итераций $K$

**for** $k = 0, 1, \ldots, K-1$ **do**
  Отправить $x_k$ всем рабочим ▷ выполняется сервером
  **for** $m = 1, \ldots, M$ параллельно **do**
    Принять $w_k$ от мастера ▷ выполняется рабочими
    Вычислить градиент $\nabla f_m(w_k)$ в точке $w_k$ ▷ выполняется рабочими
    Отправить $\nabla f_m(w_k)$ мастеру ▷ выполняется рабочими
  **end for**
  Принять $\nabla f_m(w_k)$ от всех рабочих ▷ выполняется сервером
  Вычислить $\nabla f(w_k) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \nabla f_m(w_k)$ ▷ выполняется сервером
  $w_{k+1} = \arg\min_{w \in \mathbb{R}^d} \left( \gamma \langle \nabla f(w_k), x \rangle + V(w, w_k) \right)$ ▷ выполняется сервером
**end for**

**Выход:** $w_K$

# Сходимость для задачи data similarity: доказательство

- Напомним, что сходимость определяется через константы из соотношения:

$$\mu_\varphi \nabla^2 \varphi(w) \preceq \nabla^2 f(w) \preceq L_\varphi \nabla^2 \varphi(w),$$

# Сходимость для задачи data similarity: доказательство

- Напомним, что сходимость определяется через константы из соотношения:

$$\mu_\varphi \nabla^2 \varphi(w) \preceq \nabla^2 f(w) \preceq L_\varphi \nabla^2 \varphi(w),$$

- В нашем случае:

$$\mu_\varphi \left(\delta I + \nabla^2 f_1(w)\right) \preceq \nabla^2 f(w) \preceq L_\varphi \left(\delta I + \nabla^2 f_1(w)\right)$$

# Сходимость для задачи data similarity: доказательство

- Напомним, что сходимость определяется через константы из соотношения:

$$\mu_\varphi \nabla^2 \varphi(w) \preceq \nabla^2 f(w) \preceq L_\varphi \nabla^2 \varphi(w),$$

- В нашем случае:

$$\mu_\varphi \left(\delta I + \nabla^2 f_1(w)\right) \preceq \nabla^2 f(w) \preceq L_\varphi \left(\delta I + \nabla^2 f_1(w)\right)$$

- Найдем $L_\varphi$:

$$\|\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w)\| \leq \delta \Rightarrow \nabla^2 f(w) - \nabla^2 f_1(w) \preceq \delta I$$
$$\Rightarrow \nabla^2 f(w) \preceq \delta I + \nabla^2 f_1(w) \Rightarrow L_\varphi = 1.$$

# Сходимость для задачи data similarity: доказательство

- Напомним, что сходимость определяется через константы из соотношения:

$$\mu_\varphi \nabla^2 \varphi(w) \preceq \nabla^2 f(w) \preceq L_\varphi \nabla^2 \varphi(w),$$

- В нашем случае:

$$\mu_\varphi \left(\delta I + \nabla^2 f_1(w)\right) \preceq \nabla^2 f(w) \preceq L_\varphi \left(\delta I + \nabla^2 f_1(w)\right)$$

- Найдем $L_\varphi$:

$$\|\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w)\| \leq \delta \Rightarrow \nabla^2 f(w) - \nabla^2 f_1(w) \preceq \delta I$$
$$\Rightarrow \nabla^2 f(w) \preceq \delta I + \nabla^2 f_1(w) \Rightarrow L_\varphi = 1.$$

# Сходимость для задачи data similarity: доказательство

- Найдем $\mu_\varphi$. Из сильно выпуклости функции $f$:

$$\mu I \preceq \nabla^2 f(w) \Rightarrow \delta I \preceq \frac{2\delta}{\mu}\nabla^2 f(w) - \delta I.$$

- Из $\|\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w)\| \leq \delta$ имеем:

$$\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w) \preceq \delta I.$$

- Объединяем два предыдущих пункта:

$$\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w) \preceq \frac{2\delta}{\mu}\nabla^2 f(w) - \delta I.$$

- Откуда:

$$\nabla^2 f_1(w) + \delta I \preceq \frac{2\delta + \mu}{\mu}\nabla^2 f(w) \Rightarrow \mu_\varphi = \frac{\mu}{2\delta + \mu}.$$

# Сходимость для задачи data similarity: доказательство

- Найдем $\mu_\varphi$. Из сильно выпуклости функции $f$:

$$\mu I \preceq \nabla^2 f(w) \Rightarrow \delta I \preceq \frac{2\delta}{\mu}\nabla^2 f(w) - \delta I.$$

# Сходимость для задачи data similarity: доказательство

- Найдем $\mu_\varphi$. Из сильно выпуклости функции $f$:

$$\mu I \preceq \nabla^2 f(w) \Rightarrow \delta I \preceq \frac{2\delta}{\mu}\nabla^2 f(w) - \delta I.$$

- Из $\|\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w)\| \leq \delta$ имеем:

$$\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w) \preceq \delta I.$$

# Сходимость для задачи data similarity: доказательство

- Найдем $\mu_\varphi$. Из сильно выпуклости функции $f$:

$$\mu I \preceq \nabla^2 f(w) \Rightarrow \delta I \preceq \frac{2\delta}{\mu}\nabla^2 f(w) - \delta I.$$

- Из $\|\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w)\| \leq \delta$ имеем:

$$\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w) \preceq \delta I.$$

- Объединяем два предыдущих пункта:

$$\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w) \preceq \frac{2\delta}{\mu}\nabla^2 f(w) - \delta I.$$

# Сходимость для задачи data similarity: доказательство

- Найдем $\mu_\varphi$. Из сильно выпуклости функции $f$:

$$\mu I \preceq \nabla^2 f(w) \Rightarrow \delta I \preceq \frac{2\delta}{\mu}\nabla^2 f(w) - \delta I.$$

- Из $\|\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w)\| \leq \delta$ имеем:

$$\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w) \preceq \delta I.$$

- Объединяем два предыдущих пункта:

$$\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w) \preceq \frac{2\delta}{\mu}\nabla^2 f(w) - \delta I.$$

- Откуда:

$$\nabla^2 f_1(w) + \delta I \preceq \frac{2\delta + \mu}{\mu}\nabla^2 f(w) \Rightarrow \mu_\varphi = \frac{\mu}{2\delta + \mu}.$$

# Сходимость для задачи data similarity: доказательство

- Найдем $\mu_\varphi$. Из сильно выпуклости функции $f$:

$$\mu I \preceq \nabla^2 f(w) \Rightarrow \delta I \preceq \frac{2\delta}{\mu}\nabla^2 f(w) - \delta I.$$

- Из $\|\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w)\| \leq \delta$ имеем:

$$\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w) \preceq \delta I.$$

- Объединяем два предыдущих пункта:

$$\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w) \preceq \frac{2\delta}{\mu}\nabla^2 f(w) - \delta I.$$

- Откуда:

$$\nabla^2 f_1(w) + \delta I \preceq \frac{2\delta + \mu}{\mu}\nabla^2 f(w) \Rightarrow \mu_\varphi = \frac{\mu}{2\delta + \mu}.$$

# Сходимость для задачи data similarity: теорема

## Теорема (сходимость для задачи data similarity)

Пусть $f$ сильно выпуклая, $f_i$ выпуклые, а $\ell$ - гладкие, а $\varphi(w) = f_1(w) + \delta\|w\|^2$, тогда зеркальный спуск с шагом $\gamma = 1$ сходится и выполнено:

$$V(w^*, w_K) \leq \left(1 - \frac{\mu}{\mu + 2\delta}\right)^K V(w^*, w_0).$$

# Сходимость для задачи data similarity: теорема

**Теорема (сходимость для задачи data similarity)**

Пусть $f$ сильно выпуклая, $f_i$ выпуклые, а $\ell$ - гладкие, а $\varphi(w) = f_1(w) + \delta\|w\|^2$, тогда зеркальный спуск с шагом $\gamma = 1$ сходится и выполнено:

$$V(w^*, w_K) \leq \left(1 - \frac{\mu}{\mu + 2\delta}\right)^K V(w^*, w_0).$$

- Это означает, что если нам необходимо достигнуть точности $\varepsilon$ ($V(w^*, w_K) \sim \varepsilon$), то нам необходимо

$$K = \left(\left[1 + \frac{\delta}{\mu}\right] \log \frac{V(w^*, w_0)}{\varepsilon}\right) \text{ коммуникаций.}$$

# Лучше?

- Оценка на число коммуникаций в условиях data similarity:

$$K = \mathcal{O}\left(\left[1 + \frac{\delta}{\mu}\right] \log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Оценка на число коммуникаций для обычного распределенного градиентного спуска:

$$K = \mathcal{O}\left(\frac{L}{\mu} \log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

# Лучше?

- Оценка на число коммуникаций в условиях data similarity:

$$K = \mathcal{O}\left(\left[1 + \frac{\delta}{\mu}\right] \log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Оценка на число коммуникаций для обычного распределенного градиентного спуска:

$$K = \mathcal{O}\left(\frac{L}{\mu} \log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Напомним, что $\delta \sim \frac{L}{\sqrt{N}}$, т.е. может быть значительное улучшение.

# Другой взгляд на зеркальный спуск

- Зеркальный спуск с $\gamma = 1$:

$$w_{k+1} = \arg\min_{w \in \mathbb{R}^d} \left( \langle \nabla f(w_k), w \rangle + V(w, w_k) \right),$$

где с дивергенция Брегмана $V(x, y)$, порожденной функцией $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = f_1(x) + \frac{\delta}{2}\|x\|^2.$$

- Подставим $\varphi(x)$:

$$w_{k+1} = \arg\min_{w \in \mathbb{R}^d} \left( f_1(w) + \langle \nabla f(w_k) - \nabla f_1(w_k), w \rangle + \frac{\delta}{2}\|w - w_k\|^2 \right).$$

- Или чуть по-другому:

$$w_{k+1} = \arg\min_{w \in \mathbb{R}^d} \left( \frac{1}{\delta} f_1(w) + \frac{1}{2} \left\| w - \left( w_k - \frac{1}{\delta}(\nabla f(w_k) - \nabla f_1(w_k)) \right) \right\|^2 \right)$$

# Итого про зеркальный спуск

- Всплыла идея регуляризации локальной подзадачи.
- Всплыла идея слайдинга $\approx$ проксимального метода с неточностью.
- Проксимальный метод для композитной целевой функции $g_1(w) + g_2(w)$:

$$w_{k+1} = \arg\min_{w \in \mathbb{R}^d} \left( \gamma g_2(w) + \frac{1}{2} \|w - (w_k - \gamma g_1(w_k))\|^2 \right).$$

- В нашем случае, $g_1 = f - f_1$, $g_2 = f_1$.

# Лучше?

- Мы получили:

$$K = \mathcal{O}\left(\left[1 + \frac{\delta}{\mu}\right] \log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Но есть ведь и ускоренный градиентный метод, который дает оценки:

$$K = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{L}{\mu}} \log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Непонятно, что лучше. Более того, можно ли ускорить метод для задачи с data similarity?
- Для задачи data similarity так же имеются нижние оценки:

$$K = \Omega\left(\sqrt{1 + \frac{\delta}{\mu}} \log \frac{1}{\varepsilon}\right),$$

т.е. предполагается возможное ускорение.

Arjevani Y. and Shamir O. Communication complexity of distributed convex learning and optimization

# Оптимальный алгоритм

- У данной проблемы довольно большая история:

| Reference | Communication complexity | Local gradient complexity | Order | Limitations |
|---|---|---|---|---|
| DANE [42] | $\mathcal{O}\left(\frac{\delta^2}{\mu^2}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$ | — (2) | 1st | quadratic |
| DiSCO [51] | $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}(\log\frac{1}{\varepsilon}+C^2\Delta F_0)\log\frac{L}{\mu}\right)$ | $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}(\log\frac{1}{\varepsilon}+C^2\Delta F_0)\log\frac{L}{\mu}\right)$ | 2nd | $C$ - self-concordant (3) |
| AIDE [40] | $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\log\frac{L}{\delta}\right)$ | $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\sqrt{\frac{L}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\log\frac{L}{\delta}\right)$ (4) | 1st | quadratic |
| DANE-LS [50] | $\mathcal{O}\left(\frac{\delta}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$ | $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{L}{\mu}}\frac{\delta^{3/2}}{\mu^{3/2}}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$ (5) | 1st/2nd | quadratic (6) |
| DANE-HB [50] | $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$ | $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{L}{\mu}}\frac{\delta}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$ (5) | 1st/2nd | quadratic (6) |
| SONATA [45] | $\mathcal{O}\left(\frac{\delta}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$ | — (2) | 1st | decentralized |
| SPAG [21] | $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{L}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$ (1) | — (2) | 1st | $M$ - Lipshitz hessian |
| DiRegINA [12] | $\mathcal{O}\left(\frac{\delta}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}+\sqrt{\frac{M\delta R_0}{\mu}}\right)$ | — (2) | 2nd | $M$ -Lipshitz hessian |
| ACN [1] | $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}+\sqrt[3]{\frac{M\delta R_0}{\mu}}\right)$ | — (2) | 2nd | $M$ -Lipshitz hessian |
| Acc SONATA [46] | $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\log\frac{\delta}{\mu}\right)$ | — (2) | 1st | decentralized |
| This paper | $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$ | $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{L}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$ | 1st | |

В частности, подход зеркального спуска с необычной дивергенцией называется DANE.

# Оптимальный алгоритм

- У данной проблемы довольно большая история:

| Reference | Communication complexity | Local gradient complexity | Order | Limitations |
|---|---|---|---|---|
| DANE [42] | $\mathcal{O}\left(\frac{\delta^2}{\mu^2}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$ | — (2) | 1st | quadratic |
| DiSCO [51] | $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}(\log\frac{1}{\varepsilon}+C^2\Delta F_0)\log\frac{L}{\mu}\right)$ | $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}(\log\frac{1}{\varepsilon}+C^2\Delta F_0)\log\frac{L}{\mu}\right)$ | 2nd | $C$ - self-concordant (3) |
| AIDE [40] | $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\log\frac{L}{\delta}\right)$ | $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\sqrt{\frac{L}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\log\frac{L}{\delta}\right)$ (4) | 1st | quadratic |
| DANE-LS [50] | $\mathcal{O}\left(\frac{\delta}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$ | $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{L}{\mu}}\frac{\delta^{3/2}}{\mu^{3/2}}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$ (5) | 1st/2nd | quadratic (6) |
| DANE-HB [50] | $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$ | $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{L}{\mu}}\frac{\delta}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$ (5) | 1st/2nd | quadratic (6) |
| SONATA [45] | $\mathcal{O}\left(\frac{\delta}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$ | — (2) | 1st | decentralized |
| SPAG [21] | $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{L}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$ (1) | — (2) | 1st | $M$ - Lipshitz hessian |
| DiRegINA [12] | $\mathcal{O}\left(\frac{\delta}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}+\sqrt{\frac{M\delta R_0}{\mu}}\right)$ | — (2) | 2nd | $M$ -Lipshitz hessian |
| ACN [1] | $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}+\sqrt[3]{\frac{M\delta R_0}{\mu}}\right)$ | — (2) | 2nd | $M$ -Lipshitz hessian |
| Acc SONATA [46] | $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\log\frac{\delta}{\mu}\right)$ | — (2) | 1st | decentralized |
| This paper | $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$ | $\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{L}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$ | 1st | |

В частности, подход зеркального спуска с необычной дивергенцией называется DANE.

- Оптимальный алгоритм был предложен в 2022 году:


Kovalev D. et al. Optimal Gradient Sliding and its Application to Distributed Optimization Under Similarity

# Оптимальный алгоритм

Для задачи:

$$f(w) = g_1(w) + g_2(w),$$

где $g_1 = f - f_1$ и $g_2 = f_1$.

---

**Algorithm** Accelerated Extragradient

---

1: **Input:** $w^0 = w_f^0 \in \mathbb{R}^d$
2: **Parameters:** $\tau \in (0, 1]$, $\eta, \theta, \alpha > 0$, $K \in \{1, 2, \ldots\}$
3: **for** $k = 0, 1, 2, \ldots, K-1$ **do**
4: $\quad w_g^k = \tau w^k + (1-\tau) w_f^k$
5: $\quad w_f^{k+1} \approx \underset{x \in \mathbb{R}^d}{\operatorname{argmin}} \left[ \left\langle \nabla g_1(w_g^k), w - w_g^k \right\rangle + \frac{1}{2\theta} \|w - w_g^k\|^2 + g_2(w) \right]$
6: $\quad w^{k+1} = w^k + \eta\alpha(w_f^{k+1} - w^k) - \eta \nabla g(w_f^{k+1})$
7: **end for**
8: **Output:** $w^K$

---

# Три идеи

- 1 идея – Ускорение Нестерова
- 2 идея – Слайдинг
- 3 идея – Экстраградиент
- Первые две идеи понятны, ключевой является третья идея.

# Оптимально. Но может еще?

- **Вопрос:** забудем на 1 слайд про распределенку, и вспомним всегда ли метод Нестерова оптимален?

# Оптимально. Но может еще?

- **Вопрос:** забудем на 1 слайд про распределенку, и вспомним всегда ли метод Нестерова оптимален? Нет, если учитывать специфику, что целевая функция может иметь виды суммы $f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$.
- **Вопрос:** какой тогда метод является оптимальным? какие у него верхние оценки сходимости?

# Оптимально. Но может еще?

- **Вопрос:** забудем на 1 слайд про распределенку, и вспомним всегда ли метод Нестерова оптимален? Нет, если учитывать специфику, что целевая функция может иметь виды суммы $f(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$.
- **Вопрос:** какой тогда метод является оптимальным? какие у него верхние оценки сходимости?
- Метод называется Katyusha, он имеет следующую верхнюю оценку сходимости (оракульная сложность по вызову $f_i$):

$$\mathcal{O}\left(\left[n + \sqrt{n\frac{L}{\mu}}\right]\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Allen-Zhu Z. Katyusha: the first direct acceleration of stochastic gradient methods

**Вопрос:** А какая верхняя оценка на оракульную сложность для метода Нестерова?

# Оптимально. Но может еще?

- **Вопрос:** забудем на 1 слайд про распределенку, и вспомним всегда ли метод Нестерова оптимален? Нет, если учитывать специфику, что целевая функция может иметь виды суммы $f(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$.
- **Вопрос:** какой тогда метод является оптимальным? какие у него верхние оценки сходимости?
- Метод называется Katyusha, он имеет следующую верхнюю оценку сходимости (оракульная сложность по вызову $f_i$):

$$\mathcal{O}\left(\left[n + \sqrt{n\frac{L}{\mu}}\right]\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Allen-Zhu Z. Katyusha: the first direct acceleration of stochastic gradient methods

**Вопрос:** А какая верхняя оценка на оракульную сложность для метода Нестерова? $\mathcal{O}\left(n\sqrt{\frac{L}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$

# Редукция дисперсии для similarity

- Идея метода редукции дисперсии:

$$\nabla f(x)$$
$$\downarrow$$
$$\nabla f_i(x) - \nabla f_i(w) + \nabla f(w),$$

где $i$ - генерируется случайно на каждой итерации из $[n]$, $w$ – референсная точка, которая обновляется редко (случайно или детерминистически).

- Идея метода редукции дисперсии для data similarity:

$$\nabla f(x) - \nabla f_1(x)$$
$$\downarrow$$
$$\nabla f_i(x) - \nabla f_i(w) + \nabla f(w) - f_1(x),$$

где $i$ - генерируется случайно на каждой итерации из $[M]$.

# Редукция дисперсии для similarity



Beznosikov A. & Gasnikov A. Compression and data similarity: Combination of two techniques for communication-efficient solving of distributed variational inequalities


Beznosikov A. & Gasnikov A. Similarity, Compression and Local Steps: Three Pillars of Efficient Communications for Distributed Variational Inequalities


Khaled A. & Jin C. Faster federated optimization under second-order similarity


- Старая оценка:

$$\mathcal{O}\left(M\sqrt{1+\frac{\delta}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Что можно "выбить":

$$\mathcal{O}\left(\left[M+\frac{\delta^2}{\mu^2}\right]\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \text{or} \quad \mathcal{O}\left(\left[M+\sqrt{M}\frac{\delta}{\mu}\right]\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \text{or}$$

$$\mathcal{O}\left(\left[M+M^{3/4}\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\right]\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$