Коммуникации в распределенной и федеративной оптимизации

Александр Безносиков

1 ноября 2023

Введение

Современные проблемы обучения

- Экспоненциальный рост размеров моделей и объемов данных.

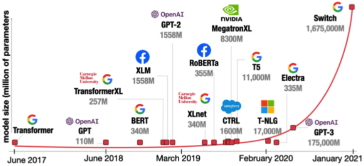


Рисунок: Динамика роста современных языковых моделей

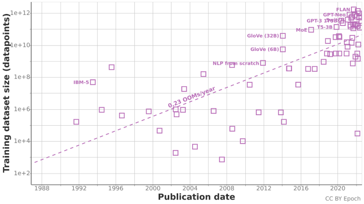


Рисунок: Динамика роста датасетов

Разновидности распределенного обучения

- Кластерное обучение (крупные игроки): обучаем в пределах одного большого и мощного вычислительного кластера
- Коллаборативное обучение (все игроки): объединяем вычислительные ресурсы по сети Интернет

Разновидности распределенного обучения

- Кластерное обучение (крупные игроки): обучаем в пределах одного большого и мощного вычислительного кластера
- Коллаборативное обучение (все игроки): объединяем вычислительные ресурсы по сети Интернет
- Федеративное обучение (другая парадигма): обучаемся на локальных данных пользователей, используя их вычислительные мощности

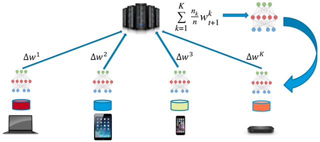


Рисунок: Федеративное обучение

Самая популярная распределенная постановка

- Постановка (горизонтальная, оффлайн):

$$\min_{w \in \mathbb{R}^d} f(w) := \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} f_m(w) := \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{n_m} \sum_{i=1}^{n_m} l(g(w, x_i), y_i).$$

- w – веса модели, g – модель, l – функция потерь.
- Данные разделены между M вычислительными устройствами, на каждом устройстве m своя локальная подвыборка $\{x_i, y_i\}_{i=1}^{n_m}$ размера n_m.
- В фокусе этого доклада.

Общаемся через сервер

- Посмотрим на примере, как обычный неопределенный GD становится централизованным.

Algorithm Централизованный GD

Вход: Размер шага $\gamma > 0$, стартовая точка $w_0 \in \mathbb{R}^d$, количество итераций K

for $k = 0, 1, \ldots, K-1$ **do**
  Отправить w_k всем рабочим ▷ выполняется сервером
  for $i = 1, \ldots, n$ параллельно **do**
    Принять w_k от мастера ▷ выполняется рабочими
    Вычислить градиент $\nabla f_m(w_k)$ в точке w_k ▷ выполняется рабочими
    Отправить $\nabla f_m(w_k)$ мастеру ▷ выполняется рабочими
  end for
  Принять $\nabla f_m(w_k)$ от всех рабочих ▷ выполняется сервером
  Вычислить $\nabla f(w_k) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \nabla f_m(w_k)$ ▷ выполняется сервером
  $w_{k+1} = w_k - \gamma \nabla f(w_k)$ ▷ выполняется сервером
end for

Выход: w^K

С чем и за что боремся?

- **Вопрос:** распределенность нужна для параллелизации, но почему не получается достигнуть полного распараллеливания?

С чем и за что боремся?

- **Вопрос:** распределенность нужна для параллелизации, но почему не получается достигнуть полного распараллеливания?
- Коммуникационные затраты являются бесполезной тратой времени.
- Проблема коммуникационного узкого места актуальна для всех постановок распределенного обучения.
- Существует много способов борьбы за эффективные коммуникации.

Сжатие: несмещенные и смещенные операторы

Несмещённая компрессия (квантизация)

Несмещённая компрессия (квантизация)

Будем называть стохастический оператор $\mathcal{Q}(x)$ оператором несмещённой компрессии (квантизации), если для любого $x \in \mathbb{R}^d$ выполняется:

$$\mathbb{E}[\mathcal{Q}(x)] = x, \quad \mathbb{E}[\|\mathcal{Q}(x)\|_2^2] \leq \omega \|x\|_2^2,$$

где $\omega \geq 1$.

Несмещённая компрессия: примеры

Случайная спарсификация (выбор случайных компонент)

Рассмотрим стохастический оператор

$$\mathrm{Randk}(x) = \frac{d}{k} \sum_{i \in S} [x]_i e_i,$$

где k — некоторое фиксированное число из множества $\{1, \ldots, d\}$ (количество компонент вектора x, которые мы передаём; например, можно выбрать $k = 1$), S — случайное подмножество множества $\{1, \ldots, d\}$ размера k (подмножество S выбирается случайно и равновероятно среди всех возможных подмножеств размера d), $[\cdot]_i$ – i-я компонента вектора, $(e_1, \ldots, e_d)$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^d$.

Richtárik P. and Takáč M. Parallel coordinate descent methods for big data optimization

Несмещённая компрессия: примеры

Случайная спарсификация (выбор случайных компонент)

Рассмотрим стохастический оператор

$$\mathrm{Randk}(x) = \frac{d}{k} \sum_{i \in S} [x]_i e_i,$$

где k — некоторое фиксированное число из множества $\{1, \ldots, d\}$ (количество компонент вектора x, которые мы передаём; например, можно выбрать $k = 1$), S — случайное подмножество множества $\{1, \ldots, d\}$ размера k (подмножество S выбирается случайно и равновероятно среди всех возможных подмножеств размера d), $[\cdot]_i$ – i-я компонента вектора, $(e_1, \ldots, e_d)$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^d$.

PDF Richtárik P. and Takáč M. Parallel coordinate descent methods for big data optimization

- **Вопрос:** зачем нужен множитель $\frac{d}{k}$?

Несмещённая компрессия: примеры

Случайная спарсификация (выбор случайных компонент)

Рассмотрим стохастический оператор

$$\mathrm{Randk}(x) = \frac{d}{k} \sum_{i \in S} [x]_i e_i,$$

где k — некоторое фиксированное число из множества $\{1, \ldots, d\}$ (количество компонент вектора x, которые мы передаём; например, можно выбрать $k = 1$), S — случайное подмножество множества $\{1, \ldots, d\}$ размера k (подмножество S выбирается случайно и равновероятно среди всех возможных подмножеств размера d), $[\cdot]_i$ – i-я компонента вектора, $(e_1, \ldots, e_d)$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^d$.

PDF Richtárik P. and Takáč M. Parallel coordinate descent methods for big data optimization

- **Вопрос:** зачем нужен множитель $\frac{d}{k}$? Для несмещенности.

Несмещённая компрессия: примеры

- **Вопрос:** Чему равно ω для случайной спарсификации?

Несмещённая компрессия: примеры

- **Вопрос:** Чему равно ω для случайной спарсификации? $\frac{d}{k}$.
  Каждая координата попадет в $\mathcal{Q}(x)$ с вероятностью $\frac{k}{d}$, поэтому

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\|\mathcal{Q}(x)\|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{d}[\mathcal{Q}(x)]_i^2\right] \\
&= \frac{d^2}{k^2}\left[\sum_{i=1}^{d}\frac{k}{d}[x]_i^2\right] \\
&= \frac{d}{k}\|x\|^2.
\end{aligned}
$$

  Здесь $[\cdot]_i$ – iая координата вектора.

Несмещённая компрессия: примеры

Трёхуровневая ℓ_2-квантизация

Рассмотрим следующий оператор:
$[\mathcal{Q}(x)]_i = \|x\|_2 \text{sign}(x_i)\xi_i, \; i = 1, \ldots, d$, где $[\cdot]_i$ – i-я компонента вектора, и ξ_i — случайная величина, имеющая распределение Бернулли с параметром $\frac{|x_i|}{\|x\|_2}$, т. е.

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } \frac{|x_i|}{\|x\|_2}, \\ 0 & \text{с вероятностью } 1 - \frac{|x_i|}{\|x\|_2}. \end{cases}$$

Таким образом, если мы хотим передать вектор $\mathcal{Q}(x)$, то нам нужно передать вектор, состоящий из нулей и ± 1, и вещественное число $\|x\|_2$, причём вероятность обнуления компоненты тем больше, чем компонента меньше по модулю. Можно показать, что данный оператор является несмещённой компрессией с константой $\omega = \sqrt{d}$.

PDF Alistarh D. et al. QSGD: Communication-Efficient SGD via Gradient Quantization and Encoding

Несмещённая компрессия: примеры

- **Вопрос:** Будет ли округление несмещенным оператором?
- **Вопрос:** Какое округление кажется наиболее естественным для вычислений на компьютере?

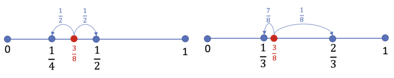
Несмещённая компрессия: примеры

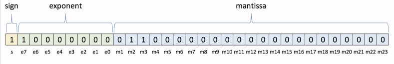
Натуральная компрессия (случайное округление к степени двойки)

Рассмотрим следующий оператор:

$$[\mathcal{Q}(x)]_i = \begin{cases} \lfloor [x]_i \rfloor_2, & \text{с вероятностью } p = \frac{[x]_i - \lceil [x]_i \rceil_2}{\lceil [x]_i \rceil_2 - \lfloor [x]_i \rfloor_2} \\ \lceil [x]_i \rceil_2, & \text{с вероятностью } 1 - p \end{cases},$$

где $[\cdot]_i$ – i-я компонента вектора, $\lfloor \cdot \rfloor_2$ – ближайшая степень двойки снизу, $\lceil \cdot \rceil_2$ – ближайшая степень двойки сверху. Округляем в двум ближайшим степеням двойки, вероятность округления больше, чем реальное число ближе к соотвествующей степени двойки. Можно показать, что $\omega = \frac{9}{8}$.





PDF Horváth S. et al. Natural compression for distributed deep learning

Несмещенная компрессия: идея

- Самая простая идея, которая приходит в голову, состоит в том, чтобы использовать параллельный `GD`, но к градиентам, пересылаемым от рабочих на сервер, применять несмещённую компрессию.

Квантизированный GD (QGD)

Algorithm QGD

Вход: размер шага $\gamma > 0$, стартовая точка $w_0 \in \mathbb{R}^d$, количество итераций K

```
for k = 0, 1, ..., K − 1 do
    Отправить w_k всем рабочим                              ▷ выполняется сервером
    for m = 1, ..., M параллельно do
        Принять w_k от мастера                             ▷ выполняется рабочими
        Вычислить градиент ∇f_m(w_k) в точке w_k           ▷ выполняется рабочими
        Независимо сгенерировать g_{k,m} = Q(∇f_m(w_k))    ▷ выполняется рабочими
        Отправить g_{k,m} мастеру                          ▷ выполняется рабочими
    end for
    Принять g_{k,m} от всех рабочих                        ▷ выполняется сервером
    Вычислить g_k = (1/M) Σ_{m=1}^{M} g_{k,m}              ▷ выполняется сервером
    w_{k+1} = w_k − γ g_k                                   ▷ выполняется сервером
end for
```

Where: Отправить w_k; $\nabla f_m(w_k)$; $g_{k,m} = \mathcal{Q}(\nabla f_m(w_k))$; $g_k = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} g_{k,m}$; $w_{k+1} = w_k - \gamma g_k$.

Выход: w^K

Несмещенная компрессия: доказательство

- Будем доказывать в случае, когда все f_m являются L-гладкими и μ-сильно выпуклыми.
- Рассмотрим одну итерацию метода:

$$\|w_{k+1} - w^*\|^2 = \|w_k - w^*\|^2 - 2\gamma\langle g_k, w_k - w^*\rangle + \|g_k\|^2.$$

Несмещенная компрессия: доказательство

- Будем доказывать в случае, когда все f_m являются L-гладкими и μ-сильно выпуклыми.
- Рассмотрим одну итерацию метода:

$$\|w_{k+1} - w^*\|^2 = \|w_k - w^*\|^2 - 2\gamma\langle g_k, w_k - w^*\rangle + \|g_k\|^2.$$

- Берем условное мат.ожидание по случайности только на итерации k:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\|w_{k+1} - w^*\|^2 \mid w_k\right] = & \|w_k - w^*\|^2 - 2\gamma\langle \mathbb{E}\left[g_k \mid w_k\right], w_k - w^*\rangle \\ & + \gamma^2\mathbb{E}\left[\|g_k\|^2 \mid w_k\right].\end{aligned}$$

Несмещенная компрессия: доказательство

- Работаем с $\mathbb{E}\left[g_k \mid w_k\right]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[g_k \mid w_k\right] &= \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\mathbb{E}\left[g_{k,m} \mid w_k\right] \\
&= \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathcal{Q}(\nabla f_m(w_k)) \mid \nabla f_m(w_k)\right] \mid w_k\right] \\
&= \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\mathbb{E}\left[\nabla f_m(w_k) \mid w_k\right] = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\nabla f_m(w_k) = \nabla f(w_k).
\end{aligned}$$

Несмещенная компрессия: доказательство

- Работаем с $\mathbb{E}\left[g_k \mid w_k\right]$:

$$\mathbb{E}\left[g_k \mid w_k\right] = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\mathbb{E}\left[g_{k,m} \mid w_k\right]$$
$$= \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathcal{Q}(\nabla f_m(w_k)) \mid \nabla f_m(w_k)\right] \mid w_k\right]$$
$$= \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\mathbb{E}\left[\nabla f_m(w_k) \mid w_k\right] = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\nabla f_m(w_k) = \nabla f(w_k).$$

- Работаем с $\mathbb{E}\left[\|g_k\|^2 \mid w_k\right]$:

$$\mathbb{E}\left[\|g_k\|^2 \mid w_k\right] = \mathbb{E}\left[\left\|\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} g_{k,m}\right\|^2 \mid x_k\right] = \frac{1}{M^2}\mathbb{E}\left[\left\|\sum_{m=1}^{M} g_{k,m}\right\|^2 \mid w^k\right]$$

Несмещенная компрессия: доказательство

- Продолжаем и применяем первое свойство (несмещенность) в определении компрессии:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\|g_k\|^2 \mid w_k\right] =& \frac{1}{M^2}\mathbb{E}\left[\left\|\sum_{m=1}^{M} g_{k,m}\right\|^2 \mid w_k\right] \\
=& \frac{1}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\mathbb{E}\left[\|g_{k,m}\|^2 \mid w_k\right] \\
&+ \frac{2}{M^2}\sum_{m\neq l}\mathbb{E}\left[\langle g_{k,m}, g_{k,l}\rangle \mid w_k\right] \\
=& \frac{1}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\mathbb{E}\left[\|g_{k,m}\|^2 \mid w_k\right] \\
&+ \frac{1}{M^2}\sum_{m\neq l}\mathbb{E}\left[\langle \mathbb{E}\left[g_{k,m} \mid \nabla f_m(w_k)\right], \mathbb{E}\left[g_{k,l} \mid \nabla f_l(x_k)\right]\rangle \mid w_k\right].
\end{aligned}
$$

Несмещенная компрессия: доказательство

- Продолжаем и применяем первое свойство (несмещенность) в определении компрессии:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\|g_k\|^2 \mid w_k\right] &= \frac{1}{M^2}\mathbb{E}\left[\left\|\sum_{m=1}^{M} g_{k,m}\right\|^2 \mid w_k\right] \\
&= \frac{1}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\mathbb{E}\left[\|g_{k,m}\|^2 \mid w_k\right] \\
&\quad + \frac{2}{M^2}\sum_{m\neq l}\mathbb{E}\left[\langle g_{k,m}, g_{k,l}\rangle \mid w_k\right] \\
&= \frac{1}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\mathbb{E}\left[\|g_{k,m}\|^2 \mid w_k\right] \\
&\quad + \frac{1}{M^2}\sum_{m\neq l}\mathbb{E}\left[\langle \mathbb{E}\left[g_{k,m} \mid \nabla f_m(w_k)\right], \mathbb{E}\left[g_{k,l} \mid \nabla f_l(x_k)\right]\rangle \mid w_k\right].
\end{aligned}
$$

Несмещенная компрессия: доказательство

- Продолжаем и применяем второе свойство в определении компрессии:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\|g_k\|^2 \mid w_k\right] =& \frac{1}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\mathbb{E}\left[\|\mathcal{Q}(\nabla f_m(w_k))\|^2 \mid w_k\right] \\
&+ \frac{1}{M^2}\sum_{m\neq l}\langle \nabla f_m(w_k), \nabla f_l(w_k)\rangle \\
\leq& \frac{\omega}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\|\nabla f_m(w_k)\|^2 \\
&+ \|\nabla f(w_k)\|^2 \\
\leq& \frac{2\omega}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\|\nabla f_m(w_k) - \nabla f_m(w^*)\|^2 \\
&+ \frac{2\omega}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\|\nabla f_m(w^*)\|^2 + \|\nabla f(w_k) - \nabla f(w^*)\|^2.
\end{aligned}
$$

Несмещенная компрессия: доказательство

- Продолжаем и применяем второе свойство в определении компрессии:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\|g_k\|^2 \mid w_k\right] \leq & \frac{4\omega L}{M^2}\sum_{m=1}^{M}(f_m(w_k) - f_m(w^*) - \langle \nabla f_m(w^*), w_k - w^* \rangle) \\
& + \frac{2\omega}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\|\nabla f_m(x^*)\|^2 + 2L(f(x_k) - f(x^*)) \\
= & \frac{4\omega L}{M}(f(x_k) - f(x^*)) \\
& + \frac{2\omega}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\|\nabla f_m(x^*)\|^2 + 2L(f(x_k) - f(x^*)).
\end{aligned}
$$

Несмещенная компрессия: доказательство

- Все, что получили:

$$\mathbb{E}\left[\|w_{k+1} - w^*\|^2 \mid w_k\right] = \|w_k - w^*\|^2 - 2\gamma\langle \mathbb{E}\left[g_k \mid w_k\right], w_k - w^*\rangle + \gamma^2 \mathbb{E}\left[\|g_k\|^2 \mid w_k\right].$$

$$\mathbb{E}\left[g_k \mid w_k\right] = \nabla f(w_k).$$

$$\mathbb{E}\left[\|g_k\|^2 \mid w_k\right] \leq \frac{4\omega L}{M}(f(w_k) - f(w^*)) + \frac{2\omega}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\|\nabla f_m(w^*)\|^2 + 2L(f(w_k) - f(w^*)).$$

Несмещенная компрессия: доказательство

- Объединяем:

$$\mathbb{E}\left[\|w_{k+1} - w^*\|^2 \mid w_k\right] \leq \|w_k - w^*\|^2 - 2\gamma\langle \nabla f(w_k), w_k - w^*\rangle + 2\gamma^2 L\left(\frac{2\omega}{M} + 1\right)(f(w_k) - f(w^*)) + \frac{2\gamma^2\omega}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\|\nabla f_m(w^*)\|^2.$$

- Пользуемся сильной выпуклостью:

$$\mathbb{E}\left[\|w_{k+1} - w^*\|^2 \mid w_k\right] \leq \|w_k - w^*\|^2 - 2\gamma\left(\frac{\mu}{2}\|w_k - w^*\|^2 + f(w_k) - f(w^*)\right) + 2\gamma^2 L\left(\frac{2\omega}{M} + 1\right)(f(w_k) - f(w^*)) + \frac{2\gamma^2\omega}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\|\nabla f_m(w^*)\|^2.$$

Несмещенная компрессия: доказательство

- Если взять полное математическое ожидание

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\|x_{k+1} - x^*\|^2\right] \leq & (1 - \gamma\mu)\mathbb{E}\left[\|x_k - x^*\|^2\right] \\
& - 2\gamma\left[1 - \gamma L\left(\frac{2\omega}{M} + 1\right)\right]\mathbb{E}\left[(f(x_k) - f(x^*))\right] \\
& + \frac{2\gamma^2\omega}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\|\nabla f_m(x^*)\|^2 .
\end{aligned}
$$

- Если $\gamma \leq L^{-1}\left(\frac{2\omega}{M} + 1\right)^{-1}$, то

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\|x_{k+1} - x^*\|^2\right] \leq & (1 - \gamma\mu)\mathbb{E}\left[\|x_k - x^*\|^2\right] \\
& + \frac{2\gamma^2\omega}{M^2}\sum_{m=1}^{M}\|\nabla f_m(x^*)\|^2 .
\end{aligned}
$$

QGD: сходимость

Теорема (QGD)

Пусть все локальные функции f_m являются μ-сильно выпуклыми и имеют L-Липшицев градиент, тогда если $\eta \leq L^{-1}\left(\frac{2\omega}{M}+1\right)^{-1}$, то

$$\mathbb{E}\left[\|x_K - x^*\|^2\right] = \mathcal{O}\left((1-\gamma\mu)^K\|x_0 - x^*\|^2 + \frac{1}{K}\cdot\frac{2\omega}{\mu M^2}\sum_{m=1}^{M}\|\nabla f_m(x^*)\|^2\right).$$

При получении данного результата так же использовался подбор γ из работы:

Stich S. Unified Optimal Analysis of the (Stochastic) Gradient Method

QGD: сходимость

Теорема (QGD)

Пусть все локальные функции f_m являются μ-сильно выпуклыми и имеют L-Липшицев градиент, тогда если $\eta \leq L^{-1}\left(\frac{2\omega}{M}+1\right)^{-1}$, то

$$\mathbb{E}\left[\|x_K - x^*\|^2\right] = \mathcal{O}\left((1-\gamma\mu)^K\|x_0 - x^*\|^2 + \frac{1}{K}\cdot\frac{2\omega}{\mu M^2}\sum_{m=1}^{M}\|\nabla f_m(x^*)\|^2\right).$$

При получении данного результата так же использовался подбор γ из работы:

PDF Stich S. Unified Optimal Analysis of the (Stochastic) Gradient Method

- **Вопрос:** какие проблемы есть в этой оценке? (вспомните оценку сходимости GD)

QGD: сходимость

Теорема (QGD)

Пусть все локальные функции f_m являются μ-сильно выпуклыми и имеют L-Липшицев градиент, тогда если $\eta \leq L^{-1}\left(\frac{2\omega}{M}+1\right)^{-1}$, то

$$\mathbb{E}\left[\|x_K - x^*\|^2\right] = \mathcal{O}\left((1-\gamma\mu)^K\|x_0 - x^*\|^2 + \frac{1}{K}\cdot\frac{2\omega}{\mu M^2}\sum_{m=1}^{M}\|\nabla f_m(x^*)\|^2\right).$$

При получении данного результата так же использовался подбор γ из работы:

PDF Stich S. Unified Optimal Analysis of the (Stochastic) Gradient Method

- **Вопрос:** какие проблемы есть в этой оценке? (вспомните оценку сходимости GD) Сублинейная сходимость (зависит от гетерогенности данных).

- Поведение на практике:

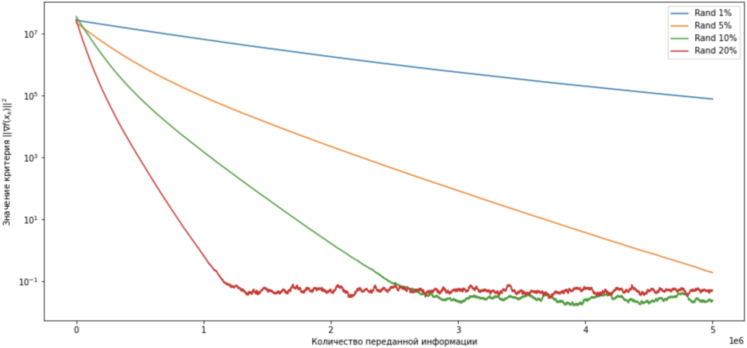


Рисунок: Поведение методов с несмещенным оператором сжатия и постоянным шагом

- В теории шаг подбирался хитро, при постояннном шаге теория предугадывает ровно этот же эффект – ранний выход на плато.

Несмещенная компрессия: решаем проблему с плато

- Метод `DIANA` – `QGD` с памятью:

Algorithm `DIANA` (скетч)

1: Каждое устройство m обладает вектором "памяти" $h_0^m = 0$

2: Сервер хранит $h_0 = \frac{1}{M}\sum\limits_{m=1}^{M} h_0^m = 0$

3: Досылаем на сервер сжатую версию разницы $\mathcal{Q}(\nabla f_m(w^k) - h_k^m)$

4: Обновляем память $h_{k+1}^m = h_k^m + \alpha\mathcal{Q}(\nabla f_m(w^k) - h_k^m)$

5: Сервер вычисляет $g_k = h_k + \frac{1}{M}\sum\limits_{m=1}^{M} \mathcal{Q}(\nabla f_m(w^k) - h_k^m)$

6: Для апдейта $w_{k+1} = w_k - \gamma g_k$

7: Сервер обновляет $h_{k+1} = h_k + \alpha\frac{1}{M}\sum\limits_{m=1}^{M} \mathcal{Q}(\nabla f_m(w^k) - h_k^m)$

PDF Mishchenko K. et al. Distributed Learning with Compressed Gradient Differences

QGD и DIANA: сходимость

- **Вопрос:** Какие есть еще вопросы к сходимости/оценкам сходимости?

- **Вопрос:** Какие есть еще вопросы к сходимости/оценкам сходимости? Лучше ли вообще сходится?
- Лучшая оценка на число коммуникаций для неускоренного метода с несмещенной компрессией (DIANA):

$$\mathcal{O}\left(\left[1 + \frac{\omega}{M}\right] \frac{L}{\mu} \log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Оценка на число коммуникаций для GD:

$$\mathcal{O}\left(\frac{L}{\mu} \log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- С точки зрения **числа** коммуникаций методы с компрессией уступают базовым методам – это ожидаемо (плата за сжатие). НО!

QGD и DIANA: сходимость

- Компрессоры сжимают информацию в β раз и типично, что $\beta \geq \omega$.

QGD и DIANA: сходимость

- Компрессоры сжимают информацию в β раз и типично, что $\beta \geq \omega$.
- Лучшая оценка на число информации для неускоренного метода с несмещенной компрессией (DIANA):

$$\mathcal{O}\left(\left[\frac{1}{\beta} + \frac{1}{M}\right]\frac{L}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Оценка на число информации для GD:

$$\mathcal{O}\left(\frac{L}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Компрессоры сжимают информацию в β раз и типично, что $\beta \geq \omega$.
- Лучшая оценка на число информации для неускоренного метода с несмещенной компрессией (DIANA):

$$\mathcal{O}\left(\left[\frac{1}{\beta} + \frac{1}{M}\right] \frac{L}{\mu} \log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Оценка на число информации для GD:

$$\mathcal{O}\left(\frac{L}{\mu} \log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Несмещенный компрессор доказуемо улучшает число передаваемой информации, фактор улучшения: $\left[\frac{1}{\beta} + \frac{1}{M}\right]$.

QGD и DIANA: сходимость

- Компрессоры сжимают информацию в β раз и типично, что $\beta \geq \omega$.
- Лучшая оценка на число информации для неускоренного метода с несмещенной компрессией (DIANA):

$$\mathcal{O}\left(\left[\frac{1}{\beta} + \frac{1}{M}\right] \frac{L}{\mu} \log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Оценка на число информации для GD:

$$\mathcal{O}\left(\frac{L}{\mu} \log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Несмещенный компрессор доказуемо улучшает число передаваемой информации, фактор улучшения: $\left[\frac{1}{\beta} + \frac{1}{M}\right]$.
- Смещенный компрессор не улучшает число передаваемой информации в общем случае.

Сервера может и не быть

- Часто на практике "централизованные коммуникации через сервер" реализованы без "сервера".
- Архитектура с AllGather/AllReduce процедурой: задан некоторый граф связей/коммуникаций, обмен сообщениями происходит согласно этому графу, в том чсиле можно организовать усреднение.

Chan, E. et al. Collective communication: theory, practice, and experience

Централизованные коммуникации без сервера

Operation	Before				After			
	Node 0	Node 1	Node 2	Node 3	Node 0	Node 1	Node 2	Node 3
Broadcast	x				x	x	x	x
Reduce(-to-one)	$x^{(0)}$	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$\sum_j x^{(j)}$			
Scatter	x_0 x_1 x_2 x_3				x_0	x_1	x_2	x_3
Gather	x_0	x_1	x_2	x_3	x_0 x_1 x_2 x_3			
Allgather	x_0	x_1	x_2	x_3	x_0 x_1 x_2 x_3	x_0 x_1 x_2 x_3	x_0 x_1 x_2 x_3	x_0 x_1 x_2 x_3
Reduce-scatter	$x_0^{(0)}$ $x_1^{(0)}$ $x_2^{(0)}$ $x_3^{(0)}$	$x_0^{(1)}$ $x_1^{(1)}$ $x_2^{(1)}$ $x_3^{(1)}$	$x_0^{(2)}$ $x_1^{(2)}$ $x_2^{(2)}$ $x_3^{(2)}$	$x_0^{(3)}$ $x_1^{(3)}$ $x_2^{(3)}$ $x_3^{(3)}$	$\sum_j x_0^{(j)}$	$\sum_j x_1^{(j)}$	$\sum_j x_2^{(j)}$	$\sum_j x_3^{(j)}$
Allreduce	$x^{(0)}$	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$\sum_j x^{(j)}$	$\sum_j x^{(j)}$	$\sum_j x^{(j)}$	$\sum_j x^{(j)}$

Рисунок: Виды коллективных централизованных коммуникаций без сервера

Ring AllReduce

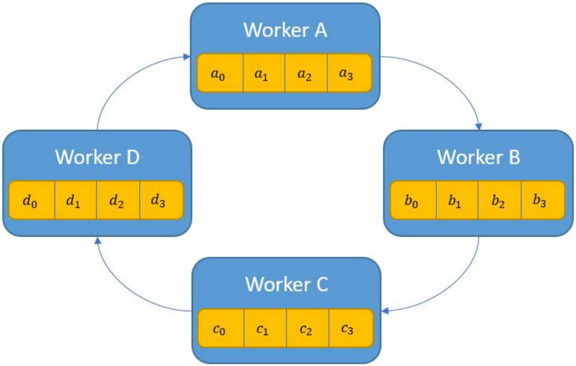


Рисунок: Картинка отсюда

Ring AllReduce: первый шаг суммирования

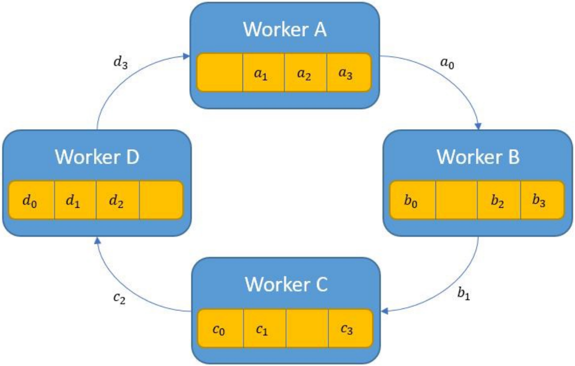


Рисунок: Картинка отсюда

Ring AllReduce: второй шаг суммирования

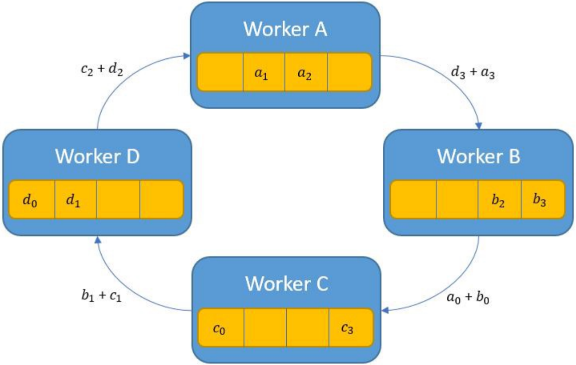


Рисунок: Картинка отсюда

Ring AllReduce: первый шаг распространения

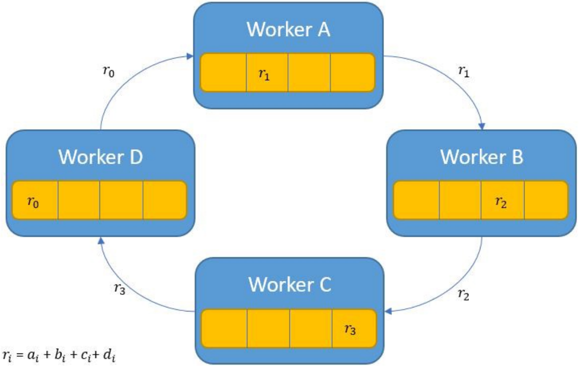


Рисунок: Картинка отсюда

Ring AllReduce: итог

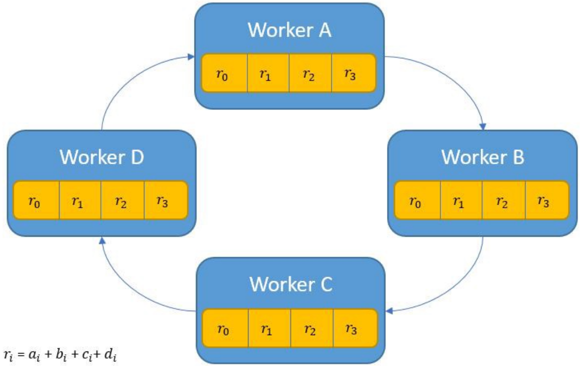


Рисунок: Картинка отсюда

Квантизированный GD (QGD) с AllReduce

Algorithm QGD

Вход: размер шага $\gamma > 0$, стартовая точка $w_0 \in \mathbb{R}^d$, количество итераций K

1: **for** $k = 0, 1, \ldots, K-1$ **do**
2: **for** $m = 1, \ldots, M$ параллельно **do**
3: Вычислить градиент $\nabla f_m(w_k)$ в точке w_k
4: Независимо сгенерировать $g_{k,m} = \mathcal{Q}(\nabla f_m(w_k))$
5: Запустить AllReduce $\{g_{k,m}\}$ и получить $g_k = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} g_{k,m}$
6: $w_{k+1} = w_k - \gamma g_k$
7: **end for**
8: **end for**

Выход: w^K

Квантизированный GD (QGD) с AllReduce

Algorithm `QGD`

Вход: размер шага $\gamma > 0$, стартовая точка $w_0 \in \mathbb{R}^d$, количество итераций K

for $k = 0, 1, \ldots, K-1$ **do**
    for $m = 1, \ldots, M$ параллельно **do**
        Вычислить градиент $\nabla f_m(w_k)$ в точке w_k
        Независимо сгенерировать $g_{k,m} = \mathcal{Q}(\nabla f_m(w_k))$
        Запустить AllReduce $\{g_{k,m}\}$ и получить $g_k = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} g_{k,m}$
        $w_{k+1} = w_k - \gamma g_k$
    end for
end for

Выход: w^K

- **Вопрос:** Какие проблемы могут появиться у (например) Randk?

Квантизированный GD (QGD) с AllReduce

Algorithm QGD

Вход: размер шага $\gamma > 0$, стартовая точка $w_0 \in \mathbb{R}^d$, количество итераций K

```
for k = 0, 1, ..., K − 1 do
    for m = 1, ..., M параллельно do
        Вычислить градиент ∇f_m(w_k) в точке w_k
        Независимо сгенерировать g_{k,m} = Q(∇f_m(w_k))
        Запустить AllReduce {g_{k,m}} и получить g_k = (1/M) Σ_{m=1}^{M} g_{k,m}
        w_{k+1} = w_k − γ g_k
    end for
end for
```

Выход: w^K

- **Вопрос:** Какие проблемы могут появиться у (например) Randk? Одинаковые ненулевые координаты у разных устройств могут вызывать коллизии.

PermK: делаем зависимую рандомизацию

Перестановочный компрессор (зависимый RandK)

Предположим, что $d \geq n$ и $d = qn$, где $q \geq 1$ – целое число. Пусть $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_d)$ – случайная перестановка $\{1, \ldots, d\}$. Тогда для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ имеем следующий оператор сжатия

$$\mathcal{Q}_i(u) = n \cdot \sum_{j=q(i-1)+1}^{qi} u_{\pi_j} e_{\pi_j}.$$

Szlendak, R. et al. Permutation Compressors for Provably Faster Distributed Nonconvex Optimization

PermK: делаем зависимую рандомизацию

Перестановочный компрессор (зависимый RandK)

Предположим, что $d \geq n$ и $d = qn$, где $q \geq 1$ – целое число. Пусть $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_d)$ – случайная перестановка $\{1, \ldots, d\}$. Тогда для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ имеем следующий оператор сжатия

$$\mathcal{Q}_i(u) = n \cdot \sum_{j=q(i-1)+1}^{qi} u_{\pi_j} e_{\pi_j}.$$

Szlendak, R. et al. Permutation Compressors for Provably Faster Distributed Nonconvex Optimization

- Дружественна к централизованным коммуникациям без сервера.
- В гомогенном случае имеют физику дешевой пересылки полного градиента.

Смещенная компрессия

- Случайный выбор – это хорошо, но и тут есть потенциал для улучшения.

Смещённая компрессия

Будем называть (стохастический) оператор (x) оператором смещённой компрессии, если для любого $x \in \mathbb{R}^d$ выполняется:

$$\mathbb{E}[\|C(x) - x\|_2^2] \leq \left(1 - \frac{1}{\delta}\right) \|x\|_2^2,$$

где $\delta \geq 0$.

Смещенная компрессия: примеры

"Жадная" спарсификация (выбор наибольших по модулю компонент)

Рассмотрим стохастический оператор

$$\mathrm{Top}_k(x) = \sum_{i=d-k+1}^{d} x_{(i)} e_{(i)},$$

где k — некоторое фиксированное число из множества $\{1, \ldots, d\}$ (количество компонент вектора x, которые мы передаём; например, можно выбрать $k = 1$), при этом координаты отсортированы по модулю: $|x_{(1)}| \leq |x_{(2)}| \leq \ldots \leq |x_{(d)}|$, $(e_1, \ldots, e_d)$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^d$. Можно показать, что данный оператор является смещённой компрессией с константой $\delta = \frac{d}{k}$.

PDF Alistarh D. et al. The convergence of sparsified gradient methods

Смещенная компрессия: примеры

- Различные примеры компрессоров (спарсификаторы, округления и тд):

  Beznosikov A. et al. On Biased Compression for Distributed Learning

- Практичный смещенный компрессор на основе итеративного SVD разложения:

  Vogels T. et al. PowerSGD: Practical Low-Rank Gradient Compression for Distributed Optimization

Смещенная компрессия: идея и доказательство в случае 1 ноды

- Использовать тот же подход, что и в несмещенном случае (QGD).

Смещенная компрессия: идея и доказательство в случае 1 ноды

- Использовать тот же подход, что и в несмещенном случае (`QGD`).
- Докажем в случае одной ноды:

$$x_{k+1} = x_k - \gamma C(\nabla f(x_k)).$$

Пусть f имеет L-Липшицев градиент и является μ-сильно выпуклой.

Смещенная компрессия: идея и доказательство в случае 1 ноды

- Использовать тот же подход, что и в несмещенном случае (`QGD`).
- Докажем в случае одной ноды:

$$x_{k+1} = x_k - \gamma C(\nabla f(x_k)).$$

  Пусть f имеет L-Липшицев градиент и является μ-сильно выпуклой.
- Начнем с того, что воспользуемся Липшицевостью градиента:

$$\begin{aligned} f(w_{k+1}) &= f(w_k - \gamma C(\nabla f(w_k))) \\ &\leq f(w_k) + \langle \nabla f(w_k), -\gamma C(\nabla f(w_k)) \rangle + \frac{L}{2} \| - \gamma C(\nabla f(w_k)) \|^2 \\ &= f(w_k) - \gamma \langle C(\nabla f(w_k)), \nabla f(w_k) \rangle + \frac{\gamma^2 L}{2} \| C(\nabla f(w_k)) \|^2. \end{aligned}$$

Смещенная компрессия: доказательство в случае 1 ноды

- Определение компрессора:

$$\|\nabla f(w_k)\|^2 - 2\mathbb{E}_C\left[\langle C(\nabla f(w_k)), \nabla f(w_k)\rangle\right] + \mathbb{E}_C\left[\|C(\nabla f(w_k))\|^2\right]$$
$$= \mathbb{E}_C\left[\|C(\nabla f(w_k)) - \nabla f(w_k)\|^2\right] \leq \left(1 - \frac{1}{\delta}\right)\|\nabla f(w_k)\|^2.$$

Смещенная компрессия: доказательство в случае 1 ноды

- Определение компрессора:

$$\|\nabla f(w_k)\|^2 - 2\mathbb{E}_C\left[\langle C(\nabla f(w_k)), \nabla f(w_k)\rangle\right] + \mathbb{E}_C\left[\|C(\nabla f(w_k))\|^2\right]$$
$$= \mathbb{E}_C\left[\|C(\nabla f(w_k)) - \nabla f(w_k)\|^2\right] \leq \left(1 - \frac{1}{\delta}\right)\|\nabla f(w_k)\|^2.$$

- Откуда:

$$-\gamma\mathbb{E}_C\left[\langle C(\nabla f(w_k)), \nabla f(w_k)\rangle\right] + \frac{\gamma}{2}\mathbb{E}_C\left[\|C(\nabla f(w_k))\|^2\right] \leq -\frac{\gamma}{2\delta}\|\nabla f(w_k)\|^2.$$

Смещенная компрессия: доказательство в случае 1 ноды

- С двух предыдущих слайдов:

$$f(w_{k+1}) - \leq f(w_k) - \gamma \langle C(\nabla f(w_k)), \nabla f(w_k) \rangle + \frac{\gamma^2 L}{2} \| C(\nabla f(w_k)) \|^2.$$

$$-\gamma \mathbb{E}_C \left[\langle C(\nabla f(w_k)), \nabla f(w_k) \rangle \right] + \frac{\gamma}{2} \mathbb{E}_C \left[\| C(\nabla f(w_k)) \|^2 \right] \leq -\frac{\gamma}{2\delta} \| \nabla f(w_k) \|^2.$$

Смещенная компрессия: доказательство в случае 1 ноды

- С двух предыдущих слайдов:

$$f(w_{k+1}) - \leq f(w_k) - \gamma\langle C(\nabla f(w_k)), \nabla f(w_k)\rangle + \frac{\gamma^2 L}{2}\|C(\nabla f(w_k))\|^2.$$

$$-\gamma\mathbb{E}_C\left[\langle C(\nabla f(w_k)), \nabla f(w_k)\rangle\right] + \frac{\gamma}{2}\mathbb{E}_C\left[\|C(\nabla f(w_k))\|^2\right] \leq -\frac{\gamma}{2\delta}\|\nabla f(w_k)\|^2.$$

- Сложим, вычтем из обоих частей $f(w^*)$ и возьмем полное мат. ожидание:

$$\mathbb{E}\left[f(w_{k+1}) - f(w^*)\right] \leq \mathbb{E}\left[f(w_k) - f(w^*)\right] - \frac{\gamma}{2}(1 - \gamma L)\,\mathbb{E}\left[\|C(\nabla f(w_k))\|^2\right] - \frac{\gamma}{2\delta}\mathbb{E}\left[\|\nabla f(w_k)\|^2\right].$$

Смещенная компрессия: доказательство в случае 1 ноды

- С двух предыдущих слайдов:

$$f(w_{k+1}) - \leq f(w_k) - \gamma\langle C(\nabla f(w_k)), \nabla f(w_k)\rangle + \frac{\gamma^2 L}{2}\|C(\nabla f(w_k))\|^2.$$

$$-\gamma \mathbb{E}_C\left[\langle C(\nabla f(w_k)), \nabla f(w_k)\rangle\right] + \frac{\gamma}{2}\mathbb{E}_C\left[\|C(\nabla f(w_k))\|^2\right] \leq -\frac{\gamma}{2\delta}\|\nabla f(w_k)\|^2.$$

- Сложим, вычтем из обоих частей $f(w^*)$ и возьмем полное мат. ожидание:

$$\mathbb{E}\left[f(w_{k+1}) - f(w^*)\right] \leq \mathbb{E}\left[f(w_k) - f(w^*)\right] - \frac{\gamma}{2}(1-\gamma L)\,\mathbb{E}\left[\|C(\nabla f(w_k))\|^2\right] - \frac{\gamma}{2\delta}\mathbb{E}\left[\|\nabla f(w_k)\|^2\right].$$

- Возьмем $\gamma \leq \frac{1}{L}$:

$$\mathbb{E}\left[f(w_{k+1}) - f(w^*)\right] \leq \mathbb{E}\left[f(w_k) - f(w^*)\right] - \frac{\gamma}{2\delta}\mathbb{E}\left[\|\nabla f(w_k)\|^2\right].$$

Смещенная компрессия: доказательство в случае 1 ноды

- С предыдущего слайда:

$$\mathbb{E}\left[f(w_{k+1}) - f(w^*)\right] \leq \mathbb{E}\left[f(w_k) - f(w^*)\right] - \frac{\gamma}{2\delta}\mathbb{E}\left[\|\nabla f(w_k)\|^2\right].$$

Смещенная компрессия: доказательство в случае 1 ноды

- С предыдущего слайда:

$$\mathbb{E}\left[f(w_{k+1}) - f(w^*)\right] \leq \mathbb{E}\left[f(w_k) - f(w^*)\right] - \frac{\gamma}{2\delta}\mathbb{E}\left[\|\nabla f(w_k)\|^2\right].$$

- Сильная выпуклость (или даже более слабое условие PL):

$$2\mu(f(w_k) - f(w^*)) \leq \|\nabla f(w_k)\|^2.$$

Смещенная компрессия: доказательство в случае 1 ноды

- С предыдущего слайда:

$$\mathbb{E}\left[f(w_{k+1}) - f(w^*)\right] \leq \mathbb{E}\left[f(w_k) - f(w^*)\right] - \frac{\gamma}{2\delta}\mathbb{E}\left[\|\nabla f(w_k)\|^2\right].$$

- Сильная выпуклость (или даже более слабое условие PL):

$$2\mu(f(w_k) - f(w^*)) \leq \|\nabla f(w_k)\|^2.$$

- Соединим два предыдущих:

$$\mathbb{E}\left[f(w_{k+1}) - f(w^*)\right] \leq \left(1 - \frac{\gamma\mu}{\delta}\right)\mathbb{E}\left[f(w_k) - f(w^*)\right].$$

Смещенная компрессия: теорема в случае 1 ноды

Теорема (сходимость QGD со смещенной компрессией в случае 1 ноды)

Пусть f μ-сильно выпуклая (или PL) и имеет L-Липшицев градиент, тогда QGD для одной ноды с шагом $\gamma \leq 1/L$ и со смещенным компрессором с параметром δ сходится и выполнено:

$$f(w_K) - f(w^*) \leq \left(1 - \frac{\gamma\mu}{\delta}\right)^K (f(w_0) - f(w^*)).$$

Beznosikov A. et al. On Biased Compression for Distributed Learning

Смещенная компрессия: не так все просто

- Рассмотрим следующую распределенную задачу с $M = 3$, $d = 3$ и локальными функциями:

$$f_1(w) = \langle a, w \rangle^2 + \frac{1}{4}\|w\|^2, \; f_2(w) = \langle b, x \rangle^2 + \frac{1}{4}\|w\|^2, \; f_3(w) = \langle c, w \rangle^2 + \frac{1}{4}\|w\|^2$$

где $a = (-3, 2, 2)$, $b = (2, -3, 2)$ и $c = (2, 2, -3)$.

Смещенная компрессия: не так все просто

- Рассмотрим следующую распределенную задачу с $M = 3$, $d = 3$ и локальными функциями:

$$f_1(w) = \langle a, w \rangle^2 + \frac{1}{4}\|w\|^2, \; f_2(w) = \langle b, x \rangle^2 + \frac{1}{4}\|w\|^2, \; f_3(w) = \langle c, w \rangle^2 + \frac{1}{4}\|w\|^2$$

  где $a = (-3, 2, 2)$, $b = (2, -3, 2)$ и $c = (2, 2, -3)$.
- **Вопрос:** где у нее оптимум?

Смещенная компрессия: не так все просто

- Рассмотрим следующую распределенную задачу с $M = 3$, $d = 3$ и локальными функциями:

$$f_1(w) = \langle a, w \rangle^2 + \frac{1}{4}\|w\|^2, \; f_2(w) = \langle b, x \rangle^2 + \frac{1}{4}\|w\|^2, \; f_3(w) = \langle c, w \rangle^2 + \frac{1}{4}\|w\|^2$$

  где $a = (-3, 2, 2)$, $b = (2, -3, 2)$ и $c = (2, 2, -3)$.
- **Вопрос:** где у нее оптимум? $(0, 0, 0)$.

- Рассмотрим следующую распределенную задачу с $M = 3$, $d = 3$ и локальными функциями:

$$f_1(w) = \langle a, w\rangle^2 + \frac{1}{4}\|w\|^2, \; f_2(w) = \langle b, x\rangle^2 + \frac{1}{4}\|w\|^2, \; f_3(w) = \langle c, w\rangle^2 + \frac{1}{4}\|w\|^2$$

где $a = (-3, 2, 2)$, $b = (2, -3, 2)$ и $c = (2, 2, -3)$.

- **Вопрос:** где у нее оптимум? $(0, 0, 0)$.
- Пусть стартовая точка $w_0 = (t, t, t)$ для какого-то $t > 0$. Тогда локальные градиенты:

$$\nabla f_1(w_0) = \frac{t}{2}(-11, 9, 9), \quad \nabla f_2(w_0) = \frac{t}{2}(9, -11, 9), \quad \nabla f_3(w_0) = \frac{t}{2}(9, 9, -11).$$

- **Вопрос:** как будет выглядеть шаг `QGD` (градиентного спуска с сжатиями), если мы будем использовать *Top*1 компрессию?

Смещенная компрессия: не так все просто

- Рассмотрим следующую распределенную задачу с $M = 3$, $d = 3$ и локальными функциями:

$$f_1(w) = \langle a, w\rangle^2 + \tfrac{1}{4}\|w\|^2,\; f_2(w) = \langle b, x\rangle^2 + \tfrac{1}{4}\|w\|^2,\; f_3(w) = \langle c, w\rangle^2 + \tfrac{1}{4}\|w\|^2$$

где $a = (-3, 2, 2)$, $b = (2, -3, 2)$ и $c = (2, 2, -3)$.

- **Вопрос:** где у нее оптимум? $(0, 0, 0)$.
- Пусть стартовая точка $w_0 = (t, t, t)$ для какого-то $t > 0$. Тогда локальные градиенты:

$$\nabla f_1(w_0) = \tfrac{t}{2}(-11, 9, 9), \quad \nabla f_2(w_0) = \tfrac{t}{2}(9, -11, 9), \quad \nabla f_3(w_0) = \tfrac{t}{2}(9, 9, -11).$$

- **Вопрос:** как будет выглядеть шаг `QGD` (градиентного спуска с сжатиями), если мы будем использовать $Top1$ компрессию?

$$w_1 = (t, t, t) + \eta \cdot \frac{11}{6}(t, t, t) = \left(1 + \frac{11\eta}{6}\right) x_0.$$

- Мы удаляемся от решения геометрически для любого $\eta > 0$.

Смещенная компрессия: компенсация ошибки

- Попробуем запоминать то, что не передали в процессе общения:

$$e_{1,m} = 0 + \gamma \nabla f_m(w_0) - C(0 + \gamma \nabla f_m(w_0)).$$

Смещенная компрессия: компенсация ошибки

- Попробуем запоминать то, что не передали в процессе общения:

$$e_{1,m} = 0 + \gamma \nabla f_m(w_0) - C(0 + \gamma \nabla f_m(w_0)).$$

- И добавлять это в будущие посылки:

$$C(e_{1,m} + \gamma \nabla f_m(w_1))$$

Смещенная компрессия: компенсация ошибки

- Попробуем запоминать то, что не передали в процессе общения:

$$e_{1,m} = 0 + \gamma \nabla f_m(w_0) - C(0 + \gamma \nabla f_m(w_0)).$$

- И добавлять это в будущие посылки:

$$C(e_{1,m} + \gamma \nabla f_m(w_1))$$

- На произвольной итерации это записывается так:

$$\begin{aligned}
&\text{Посылка:} C(e_{k,m} + \gamma \nabla f_m(w_k)),\\
&e_{k+1,m} = e_{k,m} + \gamma \nabla f_m(w_k) - C(e_{k,m} + \gamma \nabla f_m(w_k))
\end{aligned}$$

Смещенная компрессия: компенсация ошибки

- Попробуем запоминать то, что не передали в процессе общения:

$$e_{1,m} = 0 + \gamma \nabla f_m(w_0) - C(0 + \gamma \nabla f_m(w_0)).$$

- И добавлять это в будущие посылки:

$$C(e_{1,m} + \gamma \nabla f_m(w_1))$$

- На произвольной итерации это записывается так:

$$\text{Посылка:} C(e_{k,m} + \gamma \nabla f_m(w_k)),$$
$$e_{k+1,m} = e_{k,m} + \gamma \nabla f_m(w_k) - C(e_{k,m} + \gamma \nabla f_m(w_k))$$

- Это техника называется компенсация ошибка (error feedback).

PDF Stich S. et al. Sparsified SGD with memory

Algorithm QGD с error feedback

Вход: Размер шага $\gamma > 0$, стартовая точка $w_0 \in \mathbb{R}^d$, стартовые ошибки $e_{0,m} = 0$ для всех m от 1 до M, количество итераций K

for $k = 0, 1, \ldots, K-1$ **do**
    Отправить x_k всем рабочим ▷ выполняется сервером
    for $m = 1, \ldots, M$ параллельно **do**
        Принять w_k от мастера ▷ выполняется рабочими
        Вычислить градиент $\nabla f(w_k)$ в точке w_k ▷ выполняется рабочими
        Сгенерировать $g_{k,m} = C(e_{k,m} + \gamma \nabla f(w_k))$ ▷ выполняется рабочими
        Вычислить $e_{k+1,m} = e_{k,m} + \gamma \nabla f_m(w_k) - g_{k,m}$ ▷ выполняется рабочими
        Отправить $g_{k,m}$ мастеру ▷ выполняется рабочими
    end for
    Принять $g_{k,m}$ от всех рабочих ▷ выполняется сервером
    Вычислить $g_k = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} g_{k,m}$ ▷ выполняется сервером
    $w_{k+1} = w_k - g_k$ ▷ выполняется сервером
end for

Выход: w_K

QGD с error feedback: сходимость

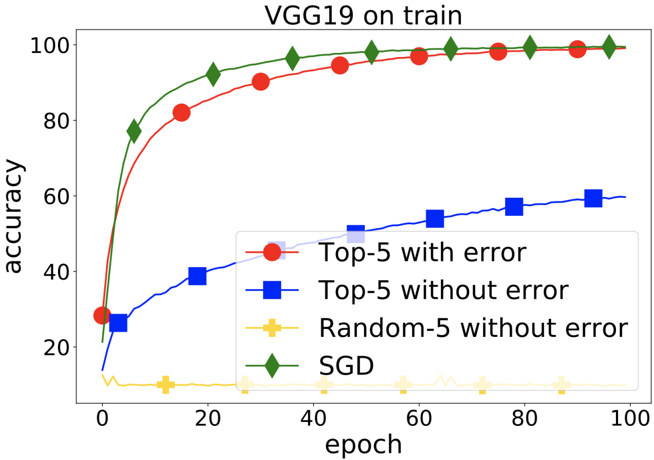


Рисунок: Точность в ходе обучения VGG19 на CIFAR10 с использование разных компрессоров

QGD с error feedback: сходимость

Теорема GD с error feedback

Пусть все локальные функции f_m являются μ-сильно выпуклыми и имеют L-Липшицев градиент, тогда если $\eta \leq \frac{1}{28\delta L}$, то

$$\mathbb{E}\left[f(\tilde{x}_K) - f(x^*)\right] \leq \mathcal{O}\left(\delta L\|x_0 - x^*\|^2 \exp\left(-\frac{\gamma\mu K}{2}\right) + \frac{\delta}{\mu K} \cdot \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\|\nabla f_m(x^*)\|^2\right).$$

Stich S. and Karimireddy S. The error-feedback framework: Better rates for SGD with delayed gradients and compressed communication

Beznosikov A. et al. On Biased Compression for Distributed Learning

- Та же самая проблема, что и у QGD – второй член в оценке по-хорошему нужно устранить.

Смещенная компрессия: решение вопроса с плато

- Идкя похожа на DIANA: память + сжатие разности

Algorithm EF21 (скетч)

1: Каждое устройство m обладает вектором "памяти" $g_0^m = 0$

2: Сервер хранит $h_0 = \frac{1}{M}\sum\limits_{m=1}^{M} h_0^m = 0$

3: Досылаем на сервер сжатую версию разницы $C(\nabla f_m(w^k) - h_k^m)$

4: Обновляем память $h_{k+1}^m = h_k^m + C(\nabla f_m(w^k) - h_k^m)$

5: Сервер вычисляет $h_{k+1} = h_k + \frac{1}{M}\sum\limits_{m=1}^{M} C(\nabla f_m(w^k) - h_k^m)$

6: Для апдейта $w_{k+1} = w_k - \gamma h_{k+1}$

PDF Richtarik P. et al. EF21: A New, Simpler, Theoretically Better, and Practically Faster Error Feedback

Несмещенная против смещенной

- Лучшая оценка на число коммуникаций для неускоренного метода с несмещенной компрессией (`DIANA`):

$$\mathcal{O}\left(\left[1 + \frac{\omega}{M}\right]\frac{L}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Лучшая оценка на число коммуникаций для неускоренного метода со смещенной компрессией (`EF-21`):

$$\mathcal{O}\left([1 + \delta]\frac{L}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Уже обсуждалось, что эти оценки хуже, чем для базового `GD`.

Несмещенная против смещенной

- Компрессоры сжимают информацию в β раз и типично, что $\beta \geq \omega$ и $\beta \geq \delta$.

Несмещенная против смещенной

- Компрессоры сжимают информацию в β раз и типично, что $\beta \geq \omega$ и $\beta \geq \delta$.
- Лучшая оценка на число информации для неускоренного метода с несмещенной компрессией (`DIANA`):

$$\mathcal{O}\left(\left[\frac{1}{\beta} + \frac{1}{M}\right]\frac{L}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Как уже обсуждалось, несмещенный компрессор доказуемо улучшает число передаваемой информации.

Несмещенная против смещенной

- Компрессоры сжимают информацию в β раз и типично, что $\beta \geq \omega$ и $\beta \geq \delta$.
- Лучшая оценка на число информации для неускоренного метода с несмещенной компрессией (`DIANA`):

$$\mathcal{O}\left(\left[\frac{1}{\beta} + \frac{1}{M}\right] \frac{L}{\mu} \log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Как уже обсуждалось, несмещенный компрессор доказуемо улучшает число передаваемой информации.
- Смещенный компрессор имеет оценку:

$$\mathcal{O}\left(\left[\frac{1}{\beta} + \frac{\delta}{\beta}\right] \frac{L}{\mu} \log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Смещенный компрессор не улучшает число передаваемой информации в общем случае. **И это открытый вопрос: как увидеть теоретическое превосходство смещенных операторов, которое часто проявляется на практике.**

Локальный подход

Идея – больше локальных вычислений

- В базовом подходе коммуникации происходят каждую итерацию.
- Если считать (стохастические) градиенты значительно дешевле, почему бы не считать несколько раз между коммуникациями.

Локальный градиентный спуск

Идея метода:

- Делать локальные шаги:

$$x_m^{k+1} = x_m^k - \gamma \nabla f_m(x_m^k, \xi_m^k).$$

- Каждую tую итерацию пересылать текущий x_m^k на сервер. Сервер усредняет $x^k = \frac{1}{M} \sum\limits_{m=1}^{M} x_m^k$, и пересылает x^k устройствам. Устройства обновляют: $x_m^k = x^k$.
- Централизованный SGD это Локальный SGD с $K = 1$.

Сходимость

- Типичная сходимость такого типа методов:

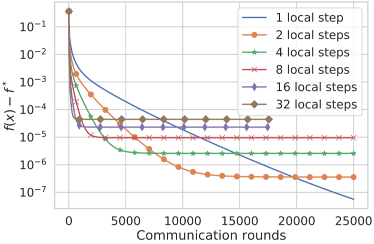


Рисунок: Сходимость Локального метода на практике для логистической регрессии.

- Быстрее с точки зрения коммуникаций, хуже качество придельной точности.

PDF Khaled A. et al. Tighter Theory for Local SGD on Identical and Heterogeneous Data

Сходимость

- **Вопрос:** из-за чего возникает такой эффект? Он возникает из-за разнородности локальных данных на разных устройствах.
- В верхних оценках сходимости метода это тоже проявляется:

$$\mathcal{O}\left(\frac{\|x^0 - x^*\|^2}{\gamma T} + \frac{\gamma \sigma_{opt}^2}{M}\right),$$

где $\gamma \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{Lt}\right)$ – шаг, K – кол-во локальных итераций на каждом устройстве, . Оценка дана для случая выпуклых и L-гладких f_m.

PDF Khaled A. et al. Tighter Theory for Local SGD on Identical and Heterogeneous Data

- Более того, фактор σ_{opt}^2 не устраняется.

PDF Glasgow M.R. et al. Sharp bounds for federated averaging (local sgd) and continuous perspective

Физика проблемы

- Далеко от решения:

- Близко к решению:

Решаем проблему

- **Вопрос:** проблема локального метода – сходимость к окрестности. Как ее можно решить?

Решаем проблему

- **Вопрос:** проблема локального метода – сходимость к окрестности. Как ее можно решить?
- Регуляризация локальной задачи:

$$\tilde{f}_m(x) := f_m(x) + \frac{\lambda}{2}\|x - v\|^2,$$

где v – некоторая референсная точка.

PDF Karimireddy S. P. SCAFFOLD: Stochastic Controlled Averaging for Federated Learning

А вообще чего хотим достичь?

- Нижние оценки:

$$K = \Omega\left(\sqrt{\frac{L}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

  L и μ – константы гладкости и сильной выпуклости f.

- **Вопрос:** какой метод даст такие оценки?

А вообще чего хотим достичь?

- Нижние оценки:

$$K = \Omega\left(\sqrt{\frac{L}{\mu}} \log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

  L и μ – константы гладкости и сильной выпуклости f.
- **Вопрос:** какой метод даст такие оценки? Распределенная версия метода Нестерова с 1 локальным шагом между коммуникациями.
- Отметим, что локальные методы стали для стохастических постановок.

А вообще чего хотим достичь?

- Нижние оценки:

$$K = \Omega\left(\sqrt{\frac{L}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

  L и μ – константы гладкости и сильной выпуклости f.
- **Вопрос:** какой метод даст такие оценки? Распределенная версия метода Нестерова с 1 локальным шагом между коммуникациями.
- Отметим, что локальные методы стали для стохастических постановок.
- Но и тут в общем случае нет улучшений.

  Woodworth B. The Min-Max Complexity of Distributed Stochastic Convex Optimization with Intermittent Communication
- Но есть постановки, где локальные методы выстреливают.

Data similarity

Data similarity

- Распределенная задача обучения:

$$f(w) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} f_m(w) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ell(w, z_i)\right],$$

где z_i – элемент выборки $(x_i,\ y_i)$, ℓ – функция потерь (в нее зашита l и g).

Data similarity

- Распределенная задача обучения:

$$f(w) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} f_m(w) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ell(w, z_i)\right],$$

  где z_i – элемент выборки (x_i, y_i), ℓ – функция потерь (в нее зашита l и g).
- Предположим, что мы можем разбить обучающую выборку равномерно между устройствами (например, если используются кластерные или коллаборативные вычисления на открытых данных).

Data similarity

- Распределенная задача обучения:

$$f(w) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} f_m(w) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ell(w, z_i)\right],$$

  где z_i – элемент выборки $(x_i,\ y_i)$, ℓ – функция потерь (в нее зашита l и g).
- Предположим, что мы можем разбить обучающую выборку равномерно между устройствами (например, если используются кластерные или коллаборативные вычисления на открытых данных).
- Это дает похожесть локальных функций потерь.

Data similarity

- Распределенная задача обучения:

$$f(w) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} f_m(w) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ell(w, z_i)\right],$$

  где z_i – элемент выборки $(x_i,\ y_i)$, ℓ – функция потерь (в нее зашита l и g).
- Предположим, что мы можем разбить обучающую выборку равномерно между устройствами (например, если используются кластерные или коллаборативные вычисления на открытых данных).
- Это дает похожесть локальных функций потерь.
- Утверждается, что для любого w

$$\|\nabla^2 f_m(w) - \nabla^2 f(w)\| \leq \delta.$$

Матричное неравенство Хёфдинга

Теорема (Матричное неравенство Хёфдинга)

Рассмотрим конечную последовательность случайных квадратных матриц $\{X_i\}_{i=1}^N$. Пусть в этой последовательности матрицы независимы, эрмитовы и имеют размерность d. Предположим так же, что $\mathbb{E}[X_i] = 0$, и $X_i^2 \preceq A^2$ почти наверное, где A – неслучайная эрмитова матрица. Тогда с вероятностью $1 - p$ выполнено, что

$$\left\| \sum_{i=1}^N X_i \right\| \leq \sqrt{8N\|A^2\| \cdot \ln(d/p)}.$$

PDF Tropp J. An introduction to matrix concentration inequalities

PDF Tropp J. User-friendly tail bounds for sums of random matrices

Параметр схожести

- Локальная функция потерь:

$$f_m(w) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \ell(w, z_i).$$

- ℓ – L-гладкая (L-Липшицев градиент), выпуклая, дважды дифференцируемая функция (например, квадратичная или логрегрессия). Тогда имеем $\nabla^2 \ell(w, z_i) \preceq LI$ для любого w и z_i (здесь I – единичная матрица.).
- Распределим все данные равномерно по всем нодам. $X_i = \frac{1}{N}\left[\nabla \ell(w, z_i) - \nabla f(w)\right]$. Легко проверить, что все условия матричного неравенства Хёфдинга для нее выполнены, в частности, $A^2 = \frac{4L^2}{N^2} I$.

Параметр схожести: итог

- В итоге имеем

$$\|\nabla^2 f_m(w) - \nabla^2 f(w)\| \leq \delta \sim \frac{L}{\sqrt{N}}.$$

Параметр схожести: итог

- В итоге имеем

$$\|\nabla^2 f_m(w) - \nabla^2 f(w)\| \leq \delta \sim \frac{L}{\sqrt{N}}.$$

- Для квадратичных задач можно получить оценку вида:

$$\|\nabla^2 f_m(w) - \nabla^2 f(w)\| \leq \delta \sim \frac{L}{N}.$$

PDF Hendrikx H. et al. Statistically Preconditioned Accelerated Gradient Method for Distributed Optimization

Параметр схожести: итог

- В итоге имеем

$$\|\nabla^2 f_m(w) - \nabla^2 f(w)\| \leq \delta \sim \frac{L}{\sqrt{N}}.$$

- Для квадратичных задач можно получить оценку вида:

$$\|\nabla^2 f_m(w) - \nabla^2 f(w)\| \leq \delta \sim \frac{L}{N}.$$

PDF Hendrikx H. et al. Statistically Preconditioned Accelerated Gradient Method for Distributed Optimization

- В любом случае следует вывод: чем больше размер локальной выборки, тем меньше параметр схожести (похожи между собой гессианы).

Метод в общем виде

- Рассмотрим зеркальный спуск:

$$w_{k+1} = \arg\min_{w \in \mathbb{R}^d} \left(\gamma \langle \nabla f(w_k), w \rangle + V(w, w_k) \right),$$

где $V(x, y)$ – дивергенция Брегмана, порожденная функцией строго-выпуклой функцией $\varphi(x)$:

$$V(x, y) = \varphi(x) - \varphi(y) - \langle \nabla \varphi(y); x - y \rangle.$$

Метод в общем виде

- Рассмотрим зеркальный спуск:

$$w_{k+1} = \arg\min_{w \in \mathbb{R}^d} \left(\gamma \langle \nabla f(w_k), w \rangle + V(w, w_k) \right),$$

где $V(x, y)$ – дивергенция Брегмана, порожденная функцией строго-выпуклой функцией $\varphi(x)$:

$$V(x, y) = \varphi(x) - \varphi(y) - \langle \nabla \varphi(y); x - y \rangle.$$

- **Вопрос:** Какой метод получится, если $\varphi(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$?

Метод в общем виде

- Рассмотрим зеркальный спуск:

$$w_{k+1} = \arg\min_{w \in \mathbb{R}^d} \left(\gamma \langle \nabla f(w_k), w \rangle + V(w, w_k) \right),$$

где $V(x, y)$ – дивергенция Брегмана, порожденная функцией строго-выпуклой функцией $\varphi(x)$:

$$V(x, y) = \varphi(x) - \varphi(y) - \langle \nabla \varphi(y); x - y \rangle.$$

- **Вопрос:** Какой метод получится, если $\varphi(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$? Градиентный спуск.

Сходимость в общем виде

Определение (относительная гладкость и сильная выпуклость)

Пусть $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ является выпуклой и дважды дифференцируемой. Будем говорить, что функция f является L_φ-гладкой и μ_φ-сильно выпуклой относительно φ, если для любого $x \in \mathbb{R}^d$ выполнено

$$\mu_\varphi \nabla^2 \varphi(x) \preceq \nabla^2 f(x) \preceq L_\varphi \nabla^2 \varphi(x),$$

или эквивалентно для любых $x, y \in \mathbb{R}^d$

$$\mu_\varphi V(x, y) \leq f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y); x - y \rangle \leq L_\varphi V(x, y).$$

PDF Lu H. et al. Relatively-Smooth Convex Optimization by First-Order Methods, and Applications

Сходимость в общем виде: доказательство

- Первое условие оптимальности для шага зеркального спуска:

$$\gamma \nabla f(w_k) + \nabla \varphi(w_{k+1}) - \nabla \varphi(w_k) = 0.$$

Сходимость в общем виде: доказательство

- Первое условие оптимальности для шага зеркального спуска:

$$\gamma \nabla f(w_k) + \nabla \varphi(w_{k+1}) - \nabla \varphi(w_k) = 0.$$

- Из него (здесь w^* – оптимум):

$$\langle \gamma \nabla f(w_k) + \nabla \varphi(w_{k+1}) - \nabla \varphi(w_k), w_{k+1} - w^* \rangle = 0.$$

$$\begin{aligned}\langle \gamma \nabla f(w_k), w^{k+1} - w^* \rangle &= \langle \nabla \varphi(w_k) - \nabla \varphi(w_{k+1}), w^{k+1} - w^* \rangle \\ &= V(w^*, w_k) - V(w^*, w_{k+1}) - V(w_{k+1}, w_k).\end{aligned}$$

(последнее утверждение называется теоремой Пифагора для дивергенций Брегмана и проверяется по определению)

Сходимость в общем виде: доказательство

- Первое условие оптимальности для шага зеркального спуска:

$$\gamma \nabla f(w_k) + \nabla \varphi(w_{k+1}) - \nabla \varphi(w_k) = 0.$$

- Из него (здесь w^* – оптимум):

$$\langle \gamma \nabla f(w_k) + \nabla \varphi(w_{k+1}) - \nabla \varphi(w_k), w_{k+1} - w^* \rangle = 0.$$

$$\begin{aligned}\langle \gamma \nabla f(w_k), w^{k+1} - w^* \rangle &= \langle \nabla \varphi(w_k) - \nabla \varphi(w_{k+1}), w^{k+1} - w^* \rangle \\ &= V(w^*, w_k) - V(w^*, w_{k+1}) - V(w_{k+1}, w_k).\end{aligned}$$

(последнее утверждение называется теоремой Пифагора для дивергенций Брегмана и проверяется по определению)

- Небольшие перестановки дадут:

$$\begin{aligned}&\langle \gamma \nabla f(w_k), w_{k+1} - w_k \rangle + V(w_{k+1}, w_k) \\ &\qquad = V(w^*, w_k) - V(w^*, w_{k+1}) - \langle \gamma \nabla f(w_k), w_k - w^* \rangle.\end{aligned}$$

Сходимость в общем виде: доказательство

- Подставим $\gamma = \frac{1}{L_\varphi}$:

$$\begin{aligned}\langle \nabla f(w_k), w^{k+1} - w^k \rangle + L_\varphi V(w_{k+1}, w_k) \\ = & L_\varphi V(w^*, w_k) - L_\varphi V(w^*, w_{k+1}) \\ & - \langle \nabla f(w_k), w_k - w^* \rangle.\end{aligned}$$

Сходимость в общем виде: доказательство

- Подставим $\gamma = \frac{1}{L_\varphi}$:

$$\begin{aligned}\langle \nabla f(w_k), w^{k+1} - w^k \rangle + L_\varphi V(w_{k+1}, w_k)& \\ =& L_\varphi V(w^*, w_k) - L_\varphi V(w^*, w_{k+1}) \\ &- \langle \nabla f(w_k), w_k - w^* \rangle.\end{aligned}$$

- Воспользуемся определением гладкость относительно φ с $x = w_{k+1}$, $y = w_k$:

$$f(w_{k+1}) - f(w_k) \leq \langle \nabla f(w_k); w_{k+1} - w_k \rangle + L_\varphi V(w_{k+1}, w_k).$$

Сходимость в общем виде: доказательство

- Подставим $\gamma = \frac{1}{L_\varphi}$:

$$\begin{aligned}\langle \nabla f(w_k), w^{k+1} - w^k \rangle + L_\varphi V(w_{k+1}, w_k) \\ = & L_\varphi V(w^*, w_k) - L_\varphi V(w^*, w_{k+1}) \\ & - \langle \nabla f(w_k), w_k - w^* \rangle.\end{aligned}$$

- Воспользуемся определением гладкость относительно φ с $x = w_{k+1}$, $y = w_k$:

$$f(w_{k+1}) - f(w_k) \leq \langle \nabla f(w_k); w_{k+1} - w_k \rangle + L_\varphi V(w_{k+1}, w_k).$$

- Соединим два предыдущих:

$$f(w_{k+1}) - f(w_k) \leq L_\varphi V(w^*, w_k) - L_\varphi V(w^*, w_{k+1}) - \langle \nabla f(w_k), w_k - w$$

Сходимость в общем виде: доказательство

- С предыдущего слайда:

$$
\begin{aligned}
f(w_{k+1}) - f(w_k) \leq & L_\varphi V(w^*, w_k) - L_\varphi V(w^*, w_{k+1}) \\
& - \langle \nabla f(w_k), w_k - w^* \rangle.
\end{aligned}
$$

Сходимость в общем виде: доказательство

- С предыдущего слайда:

$$f(w_{k+1}) - f(w_k) \leq L_\varphi V(w^*, w_k) - L_\varphi V(w^*, w_{k+1}) - \langle \nabla f(w_k), w_k - w^* \rangle.$$

- Относительная сильная выпуклость:

$$\mu_\varphi V(w^*, w_k) \leq f(w^*) - f(w_k) - \langle \nabla f(w_k); w^* - w_k \rangle$$

Сходимость в общем виде: доказательство

- С предыдущего слайда:

$$f(w_{k+1}) - f(w_k) \leq L_\varphi V(w^*, w_k) - L_\varphi V(w^*, w_{k+1}) \\ - \langle \nabla f(w_k), w_k - w^* \rangle.$$

- Относительная сильная выпуклость:

$$\mu_\varphi V(w^*, w_k) \leq f(w^*) - f(w_k) - \langle \nabla f(w_k); w^* - w_k \rangle$$

- Сложим два предыдущих и немного поперемещаем:

$$f(w_{k+1}) - f(w^*) \leq (L_\varphi - \mu_\varphi) V(w^*, w_k) - L_\varphi V(w^*, w_{k+1}).$$

Сходимость в общем виде: доказательство

- С предыдущего слайда:

$$f(w_{k+1}) - f(w_k) \leq L_\varphi V(w^*, w_k) - L_\varphi V(w^*, w_{k+1}) \\ - \langle \nabla f(w_k), w_k - w^* \rangle.$$

- Относительная сильная выпуклость:

$$\mu_\varphi V(w^*, w_k) \leq f(w^*) - f(w_k) - \langle \nabla f(w_k); w^* - w_k \rangle$$

- Сложим два предыдущих и немного поперемещаем:

$$f(w_{k+1}) - f(w^*) \leq (L_\varphi - \mu_\varphi) V(w^*, w_k) - L_\varphi V(w^*, w_{k+1}).$$

- В силу того, что w^* – оптимум:

$$V(w^*, w_{k+1}) \leq \left(1 - \frac{\mu_\varphi}{L_\varphi}\right) V(w^*, w_k).$$

Сходимость в общем виде: теорема

Теорема (сходимость зеркального спуска)

Пусть φ и f удовлетворяют определению выше, тогда зеркальный спуск с шагом $\gamma = \frac{1}{L_\varphi}$ сходится и выполнено:

$$V(w^*, w_K) \leq \left(1 - \frac{\mu_\varphi}{L_\varphi}\right)^K V(w^*, w_0).$$

PDF Lu H. et al. Relatively-Smooth Convex Optimization by First-Order Methods, and Applications

Метод для задачи data similarity

- Зеркальный спуск:

$$w_{k+1} = \arg\min_{w \in \mathbb{R}^d} \left(\gamma \langle \nabla f(w_k), w \rangle + V(w, w_k) \right),$$

где с дивергенция Брегмана $V(x, y)$, порожденной функцией $\varphi(x)$ (тут нужно потребовать, чтобы f_1 была выпуклой):

$$\varphi(x) = f_1(x) + \frac{\delta}{2} \|x\|^2.$$

Функция f_1 хранится на сервере.

Метод для задачи data similarity

- Зеркальный спуск:

$$w_{k+1} = \arg\min_{w \in \mathbb{R}^d} \left(\gamma \langle \nabla f(w_k), w \rangle + V(w, w_k)\right),$$

где с дивергенция Брегмана $V(x, y)$, порожденной функцией $\varphi(x)$ (тут нужно потребовать, чтобы f_1 была выпуклой):

$$\varphi(x) = f_1(x) + \frac{\delta}{2}\|x\|^2.$$

Функция f_1 хранится на сервере.

- **Вопрос:** Какое число коммуникаций происходит за K итераций такого зеркального спуска?

Метод для задачи data similarity

- Зеркальный спуск:

$$w_{k+1} = \arg\min_{w \in \mathbb{R}^d} \left(\gamma \langle \nabla f(w_k), w \rangle + V(w, w_k) \right),$$

где с дивергенция Брегмана $V(x, y)$, порожденной функцией $\varphi(x)$ (тут нужно потребовать, чтобы f_1 была выпуклой):

$$\varphi(x) = f_1(x) + \frac{\delta}{2}\|x\|^2.$$

Функция f_1 хранится на сервере.

- **Вопрос:** Какое число коммуникаций происходит за K итераций такого зеркального спуска? K коммуникаций (количество подсчетов градиента ∇f), вычисления $\arg\min$ требуют только вычислений на сервере.

Метод для задачи data similarity

Algorithm `Зеркальный спуск для задачи data similarity`

Вход: Размер шага $\gamma > 0$, стартовая точка $w^0 \in \mathbb{R}^d$, количество итераций K

for $k = 0, 1, \ldots, K-1$ **do**
  Отправить x_k всем рабочим ▷ выполняется сервером
  for $m = 1, \ldots, M$ параллельно **do**
    Принять w_k от мастера ▷ выполняется рабочими
    Вычислить градиент $\nabla f_m(w_k)$ в точке w_k ▷ выполняется рабочими
    Отправить $\nabla f_m(w_k)$ мастеру ▷ выполняется рабочими
  end for
  Принять $\nabla f_m(w_k)$ от всех рабочих ▷ выполняется сервером
  Вычислить $\nabla f(w_k) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \nabla f_m(w_k)$ ▷ выполняется сервером
  $w_{k+1} = \arg\min_{w \in \mathbb{R}^d} \left(\gamma \langle \nabla f(w_k), x \rangle + V(w, w_k)\right)$ ▷ выполняется сервером
end for

Выход: w_K

Сходимость для задачи data similarity: доказательство

- Напомним, что сходимость определяется через константы из соотношения:

$$\mu_\varphi \nabla^2 \varphi(w) \preceq \nabla^2 f(w) \preceq L_\varphi \nabla^2 \varphi(w),$$

Сходимость для задачи data similarity: доказательство

- Напомним, что сходимость определяется через константы из соотношения:

$$\mu_\varphi \nabla^2 \varphi(w) \preceq \nabla^2 f(w) \preceq L_\varphi \nabla^2 \varphi(w),$$

- В нашем случае:

$$\mu_\varphi \left(\delta I + \nabla^2 f_1(w)\right) \preceq \nabla^2 f(w) \preceq L_\varphi \left(\delta I + \nabla^2 f_1(w)\right)$$

Сходимость для задачи data similarity: доказательство

- Напомним, что сходимость определяется через константы из соотношения:

$$\mu_\varphi \nabla^2 \varphi(w) \preceq \nabla^2 f(w) \preceq L_\varphi \nabla^2 \varphi(w),$$

- В нашем случае:

$$\mu_\varphi \left(\delta I + \nabla^2 f_1(w)\right) \preceq \nabla^2 f(w) \preceq L_\varphi \left(\delta I + \nabla^2 f_1(w)\right)$$

- Найдем L_φ:

$$\|\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w)\| \leq \delta \Rightarrow \nabla^2 f(w) - \nabla^2 f_1(w) \preceq \delta I$$
$$\Rightarrow \nabla^2 f(w) \preceq \delta I + \nabla^2 f_1(w) \Rightarrow L_\varphi = 1.$$

Сходимость для задачи data similarity: доказательство

- Напомним, что сходимость определяется через константы из соотношения:

$$\mu_\varphi \nabla^2 \varphi(w) \preceq \nabla^2 f(w) \preceq L_\varphi \nabla^2 \varphi(w),$$

- В нашем случае:

$$\mu_\varphi \left(\delta I + \nabla^2 f_1(w)\right) \preceq \nabla^2 f(w) \preceq L_\varphi \left(\delta I + \nabla^2 f_1(w)\right)$$

- Найдем L_φ:

$$\|\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w)\| \leq \delta \Rightarrow \nabla^2 f(w) - \nabla^2 f_1(w) \preceq \delta I$$
$$\Rightarrow \nabla^2 f(w) \preceq \delta I + \nabla^2 f_1(w) \Rightarrow L_\varphi = 1.$$

Сходимость для задачи data similarity: доказательство

- Найдем μ_φ. Из сильно выпуклости функции f:

$$\mu I \preceq \nabla^2 f(w) \Rightarrow \delta I \preceq \frac{2\delta}{\mu} \nabla^2 f(w) - \delta I.$$

- Из $\|\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w)\| \leq \delta$ имеем:

$$\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w) \preceq \delta I.$$

- Объединяем два предыдущих пункта:

$$\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w) \preceq \frac{2\delta}{\mu} \nabla^2 f(w) - \delta I.$$

- Откуда:

$$\nabla^2 f_1(w) + \delta I \preceq \frac{2\delta + \mu}{\mu} \nabla^2 f(w) \Rightarrow \mu_\varphi = \frac{\mu}{2\delta + \mu}.$$

Сходимость для задачи data similarity: доказательство

- Найдем μ_φ. Из сильно выпуклости функции f:

$$\mu I \preceq \nabla^2 f(w) \Rightarrow \delta I \preceq \frac{2\delta}{\mu} \nabla^2 f(w) - \delta I.$$

- Найдем μ_φ. Из сильно выпуклости функции f:

$$\mu I \preceq \nabla^2 f(w) \Rightarrow \delta I \preceq \frac{2\delta}{\mu} \nabla^2 f(w) - \delta I.$$

- Из $\|\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w)\| \leq \delta$ имеем:

$$\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w) \preceq \delta I.$$

Сходимость для задачи data similarity: доказательство

- Найдем μ_φ. Из сильно выпуклости функции f:

$$\mu I \preceq \nabla^2 f(w) \Rightarrow \delta I \preceq \frac{2\delta}{\mu}\nabla^2 f(w) - \delta I.$$

- Из $\|\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w)\| \leq \delta$ имеем:

$$\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w) \preceq \delta I.$$

- Объединяем два предыдущих пункта:

$$\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w) \preceq \frac{2\delta}{\mu}\nabla^2 f(w) - \delta I.$$

Сходимость для задачи data similarity: доказательство

- Найдем μ_φ. Из сильно выпуклости функции f:

$$\mu I \preceq \nabla^2 f(w) \Rightarrow \delta I \preceq \frac{2\delta}{\mu}\nabla^2 f(w) - \delta I.$$

- Из $\|\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w)\| \leq \delta$ имеем:

$$\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w) \preceq \delta I.$$

- Объединяем два предыдущих пункта:

$$\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w) \preceq \frac{2\delta}{\mu}\nabla^2 f(w) - \delta I.$$

- Откуда:

$$\nabla^2 f_1(w) + \delta I \preceq \frac{2\delta + \mu}{\mu}\nabla^2 f(w) \Rightarrow \mu_\varphi = \frac{\mu}{2\delta + \mu}.$$

- Найдем μ_φ. Из сильно выпуклости функции f:

$$\mu I \preceq \nabla^2 f(w) \Rightarrow \delta I \preceq \frac{2\delta}{\mu}\nabla^2 f(w) - \delta I.$$

- Из $\|\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w)\| \leq \delta$ имеем:

$$\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w) \preceq \delta I.$$

- Объединяем два предыдущих пункта:

$$\nabla^2 f_1(w) - \nabla^2 f(w) \preceq \frac{2\delta}{\mu}\nabla^2 f(w) - \delta I.$$

- Откуда:

$$\nabla^2 f_1(w) + \delta I \preceq \frac{2\delta + \mu}{\mu}\nabla^2 f(w) \Rightarrow \mu_\varphi = \frac{\mu}{2\delta + \mu}.$$

Сходимость для задачи data similarity: теорема

Теорема (сходимость для задачи data similarity)

Пусть f сильно выпуклая, f_i выпуклые, а ℓ - гладкие, а $\varphi(w) = f_1(w) + \delta\|w\|^2$, тогда зеркальный спуск с шагом $\gamma = 1$ сходится и выполнено:

$$V(w^*, w_K) \leq \left(1 - \frac{\mu}{\mu + 2\delta}\right)^K V(w^*, w_0).$$

Сходимость для задачи data similarity: теорема

Теорема (сходимость для задачи data similarity)

Пусть f сильно выпуклая, f_i выпуклые, а ℓ - гладкие, а $\varphi(w) = f_1(w) + \delta\|w\|^2$, тогда зеркальный спуск с шагом $\gamma = 1$ сходится и выполнено:

$$V(w^*, w_K) \leq \left(1 - \frac{\mu}{\mu + 2\delta}\right)^K V(w^*, w_0).$$

- Это означает, что если нам необходимо достигнуть точности ε $(V(w^*, w_K) \sim \varepsilon)$, то нам необходимо

$$K = \left(\left[1 + \frac{\delta}{\mu}\right] \log \frac{V(w^*, w_0)}{\varepsilon}\right) \text{ коммуникаций.}$$

Лучше?

- Оценка на число коммуникаций в условиях data similarity:

$$K = \mathcal{O}\left(\left[1 + \frac{\delta}{\mu}\right] \log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Оценка на число коммуникаций для обычного распределенного градиентного спуска:

$$K = \mathcal{O}\left(\frac{L}{\mu} \log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Лучше?

- Оценка на число коммуникаций в условиях data similarity:

$$K = \mathcal{O}\left(\left[1 + \frac{\delta}{\mu}\right] \log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Оценка на число коммуникаций для обычного распределенного градиентного спуска:

$$K = \mathcal{O}\left(\frac{L}{\mu} \log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Напомним, что $\delta \sim \frac{L}{\sqrt{N}}$, т.е. может быть значительное улучшение.

Другой взгляд на зеркальный спуск

- Зеркальный спуск с $\gamma = 1$:

$$w_{k+1} = \arg\min_{w \in \mathbb{R}^d} \left(\langle \nabla f(w_k), w \rangle + V(w, w_k) \right),$$

где с дивергенция Брегмана $V(x,y)$, порожденной функцией $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = f_1(x) + \frac{\delta}{2}\|x\|^2.$$

- Подставим $\varphi(x)$:

$$w_{k+1} = \arg\min_{w \in \mathbb{R}^d} \left(f_1(w) + \langle \nabla f(w_k) - \nabla f_1(w_k), w \rangle + \frac{\delta}{2}\|w - w_k\|^2 \right).$$

- Или чуть по-другому:

$$w_{k+1} = \arg\min_{w \in \mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{\delta} f_1(w) + \frac{1}{2} \left\| w - \left(w_k - \frac{1}{\delta}(\nabla f(w_k) - \nabla f_1(w_k)) \right) \right\|^2 \right)$$

Итого про зеркальный спуск

- Всплыла идея регуляризации локальной подзадачи.
- Всплыла идея слайдинга $\approx$ проксимального метода с неточностью.
- Проксимальный метод для композитной целевой функции $g_1(w) + g_2(w)$:

$$w_{k+1} = \arg\min_{w \in \mathbb{R}^d} \left(\gamma g_2(w) + \frac{1}{2} \| w - (w_k - \gamma g_1(w_k)) \|^2 \right).$$

- В нашем случае, $g_1 = f - f_1$, $g_2 = f_1$.

Лучше?

- Мы получили:

$$K = \mathcal{O}\left(\left[1 + \frac{\delta}{\mu}\right] \log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Но есть ведь и ускоренный градиентный метод, который дает оценки:

$$K = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{L}{\mu}} \log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Непонятно, что лучше. Более того, можно ли ускорить метод для задачи с data similarity?
- Для задачи data similarity так же имеются нижние оценки:

$$K = \Omega\left(\sqrt{1 + \frac{\delta}{\mu}} \log \frac{1}{\varepsilon}\right),$$

т.е. предполагается возможное ускорение.

Arjevani Y. and Shamir O. Communication complexity of distributed convex learning and optimization

- У данной проблемы довольно большая история:

Reference	Communication complexity	Local gradient complexity	Order	Limitations
DANE [42]	$\mathcal{O}\left(\frac{\delta^2}{\mu^2}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$	— [(2)]	1st	quadratic
DiSCO [51]	$\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}(\log\frac{1}{\varepsilon} + C^2\Delta F_0)\log\frac{L}{\mu}\right)$	$\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}(\log\frac{1}{\varepsilon} + C^2\Delta F_0)\log\frac{L}{\mu}\right)$	2nd	C - self-concordant [(3)]
AIDE [40]	$\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\log\frac{L}{\delta}\right)$	$\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\sqrt{\frac{L}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\log\frac{L}{\delta}\right)$ [(4)]	1st	quadratic
DANE-LS [50]	$\mathcal{O}\left(\frac{\delta}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{L}{\mu}}\frac{\delta^{3/2}}{\mu^{3/2}}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$ [(5)]	1st/2nd	quadratic [(6)]
DANE-HB [50]	$\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{L}{\mu}}\frac{\delta}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$ [(5)]	1st/2nd	quadratic [(6)]
SONATA [45]	$\mathcal{O}\left(\frac{\delta}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$	— [(2)]	1st	decentralized
SPAG [21]	$\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{L}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$ [(1)]	— [(2)]	1st	M - Lipshitz hessian
DiRegINA [12]	$\mathcal{O}\left(\frac{\delta}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{M\delta R_0}{\mu}}\right)$	— [(2)]	2nd	M -Lipshitz hessian
ACN [1]	$\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt[3]{\frac{M\delta R_0}{\mu}}\right)$	— [(2)]	2nd	M -Lipshitz hessian
Acc SONATA [46]	$\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\log\frac{\delta}{\mu}\right)$	— [(2)]	1st	decentralized
This paper	$\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{L}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$	1st	

В частности, подход зеркального спуска с необычной дивергенцией называется DANE.

Оптимальный алгоритм

- У данной проблемы довольно большая история:

Reference	Communication complexity	Local gradient complexity	Order	Limitations
`DANE` [42]	$\mathcal{O}\left(\frac{\delta^2}{\mu^2}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$	— (2)	1st	quadratic
`DiSCO` [51]	$\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}(\log\frac{1}{\varepsilon}+C^2\Delta F_0)\log\frac{L}{\mu}\right)$	$\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}(\log\frac{1}{\varepsilon}+C^2\Delta F_0)\log\frac{L}{\mu}\right)$	2nd	C - self-concordant (3)
`AIDE` [40]	$\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\log\frac{L}{\delta}\right)$	$\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\sqrt{\frac{L}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\log\frac{L}{\delta}\right)$ (4)	1st	quadratic
`DANE-LS` [50]	$\mathcal{O}\left(\frac{\delta}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{L}{\mu}}\frac{\delta^{3/2}}{\mu^{3/2}}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$ (5)	1st/2nd	quadratic (6)
`DANE-HB` [50]	$\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{L}{\mu}}\frac{\delta}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$ (5)	1st/2nd	quadratic (6)
`SONATA` [45]	$\mathcal{O}\left(\frac{\delta}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$	— (2)	1st	decentralized
`SPAG` [21]	$\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{L}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$ (1)	— (2)	1st	M - Lipshitz hessian
`DiRegINA` [12]	$\mathcal{O}\left(\frac{\delta}{\mu}\log\frac{1}{\varepsilon}+\sqrt{\frac{M\delta R_0}{\mu}}\right)$	— (2)	2nd	M -Lipshitz hessian
`ACN` [1]	$\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}+\sqrt[3]{\frac{M\delta R_0}{\mu}}\right)$	— (2)	2nd	M -Lipshitz hessian
`Acc SONATA` [46]	$\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\log\frac{\delta}{\mu}\right)$	— (2)	1st	decentralized
This paper	$\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$\mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{L}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$	1st	

В частности, подход зеркального спуска с необычной дивергенцией называется DANE.

- Оптимальный алгоритм был предложен в 2022 году:

PDF Kovalev D. et al. Optimal Gradient Sliding and its Application to Distributed Optimization Under Similarity

Оптимальный алгоритм

Для задачи:

$$f(w) = g_1(w) + g_2(w),$$

где $g_1 = f - f_1$ и $g_2 = f_1$.

Algorithm Accelerated Extragradient

1: **Input:** $w^0 = w_f^0 \in \mathbb{R}^d$
2: **Parameters:** $\tau \in (0,1]$, $\eta, \theta, \alpha > 0$, $K \in \{1, 2, \dots\}$
3: **for** $k = 0, 1, 2, \dots, K-1$ **do**
4: $\quad w_g^k = \tau w^k + (1-\tau) w_f^k$
5: $\quad w_f^{k+1} \approx \underset{x \in \mathbb{R}^d}{\operatorname{argmin}} \left[\langle \nabla g_1(w_g^k), w - w_g^k \rangle + \frac{1}{2\theta} \| w - w_g^k \|^2 + g_2(w) \right]$
6: $\quad w^{k+1} = w^k + \eta\alpha(w_f^{k+1} - w^k) - \eta \nabla g(w_f^{k+1})$
7: **end for**
8: **Output:** w^K

Три идеи

- 1 идея – Ускорение Нестерова
- 2 идея – Слайдинг
- 3 идея – Экстраградиент
- Первые две идеи понятны, ключевой является третья идея.

Оптимально. Но может еще?

- **Вопрос:** забудем на 1 слайд про распределенку, и вспомним всегда ли метод Нестерова оптимален?

Оптимально. Но может еще?

- **Вопрос:** забудем на 1 слайд про распределенку, и вспомним всегда ли метод Нестерова оптимален? Нет, если учитывать специфику, что целевая функция может иметь виды суммы $f(x) = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)$.
- **Вопрос:** какой тогда метод является оптимальным? какие у него верхние оценки сходимости?

Оптимально. Но может еще?

- **Вопрос:** забудем на 1 слайд про распределенку, и вспомним всегда ли метод Нестерова оптимален? Нет, если учитывать специфику, что целевая функция может иметь виды суммы $f(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$.
- **Вопрос:** какой тогда метод является оптимальным? какие у него верхние оценки сходимости?
- Метод называется Katyusha, он имеет следующую верхнюю оценку сходимости (оракульная сложность по вызову f_i):

$$\mathcal{O}\left(\left[n + \sqrt{n\frac{L}{\mu}}\right]\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

PDF Allen-Zhu Z. Katyusha: the first direct acceleration of stochastic gradient methods

Вопрос: А какая верхняя оценка на оракульную сложность для метода Нестерова?

Оптимально. Но может еще?

- **Вопрос:** забудем на 1 слайд про распределенку, и вспомним всегда ли метод Нестерова оптимален? Нет, если учитывать специфику, что целевая функция может иметь виды суммы $f(x) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)$.
- **Вопрос:** какой тогда метод является оптимальным? какие у него верхние оценки сходимости?
- Метод называется Katyusha, он имеет следующую верхнюю оценку сходимости (оракульная сложность по вызову f_i):

$$\mathcal{O}\left(\left[n + \sqrt{n\frac{L}{\mu}}\right]\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Allen-Zhu Z. Katyusha: the first direct acceleration of stochastic gradient methods

Вопрос: А какая верхняя оценка на оракульную сложность для метода Нестерова? $\mathcal{O}\left(n\sqrt{\frac{L}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$

Редукция дисперсии для similarity

- Идея метода редукции дисперсии:

$$\nabla f(x)$$
$$\downarrow$$
$$\nabla f_i(x) - \nabla f_i(w) + \nabla f(w),$$

  где i - генерируется случайно на каждой итерации из $[n]$, w – референсная точка, которая обновляется редко (случайно или детерминистически).

- Идея метода редукции дисперсии для data similarity:

$$\nabla f(x) - \nabla f_1(x)$$
$$\downarrow$$
$$\nabla f_i(x) - \nabla f_i(w) + \nabla f(w) - f_1(x),$$

  где i - генерируется случайно на каждой итерации из $[M]$.

Редукция дисперсии для similarity

Beznosikov A. & Gasnikov A. Compression and data similarity: Combination of two techniques for communication-efficient solving of distributed variational inequalities

Beznosikov A. & Gasnikov A. Similarity, Compression and Local Steps: Three Pillars of Efficient Communications for Distributed Variational Inequalities

Khaled A. & Jin C. Faster federated optimization under second-order similarity

- Старая оценка:

$$\mathcal{O}\left(M\sqrt{1+\frac{\delta}{\mu}}\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Что можно "выбить":

$$\mathcal{O}\left(\left[M+\frac{\delta^2}{\mu^2}\right]\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \text{or} \quad \mathcal{O}\left(\left[M+\sqrt{M}\frac{\delta}{\mu}\right]\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \text{or}$$

$$\mathcal{O}\left(\left[M+M^{3/4}\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\right]\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$